НАЧАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРІЯ,

И

КОНИЧЕСКІЯ СѢЧЕНІЯ

ФРАНЦЪ СИМАШКО

Изд „Книжнаго Магазина для Иногородныхъ“

ИЗДАНІЕ ПЯТОЕ ДОПОЛНЕННОЕ

С. ПЕТЕРБУРГЪ.

Тип I Мордуховскаго, (быв. Неклюдова) Изм пр д № 14—24

1876

Наставленіе для пользованія настоящимъ руководствомъ безъ помощи учителя

1. При доказательствахъ предложеній (теоремъ) надо давать себѣ строгій отчетъ въ выводимыхъ заключеніяхъ, не слѣдуетъ довольствоваться кажущимся доказательствомъ. Чтобы достигнуть этого, надо доказательства основывать во 1-хъ на опредѣленіяхъ, которыя слѣдуетъ заучивать наизусть, во 2-хъ на аксіомахъ, проводимыхъ въ руководствѣ, и въ 3-хъ на предложеніяхъ уже доказанныхъ.

2. При разборѣ предложеній совѣтуемъ учащемуся воспроизводить чертежъ по мѣрѣ чтенія текста, а не пользоваться готовымъ чертежомъ. Напримѣръ, читая § 22, чертимъ сначала углы AOB, A'O'B' и A''O''B'', такъ что на нашемъ чертежѣ пока нѣтъ ни линіи OC, ни OD; когда въ текстѣ дойдемъ до выраженія: «пусть другой бокъ O'B' приметъ положеніе OC», тогда и проведемъ на нашемъ чертежѣ прямую OC, далѣе, дойдя до выраженія: «пусть другой бокъ O''B'' приметъ положеніе OD», проводимъ на нашемъ чертежѣ OD, и такимъ образомъ восполнимъ весь чертежъ, приложенный въ текстѣ.

3. При ссылкахъ на параграфы надо повторять дословно предложеніе, или опредѣленіе или аксіому того параграфа, на который ссылаются; напр., въ § 28 читаемъ: «Мы доказали (§ 27)», слѣдуетъ читать: мы доказали, что *сумма смежныхъ угловъ равна суммѣ какихъ-нибудь другихъ смежныхъ угловъ*. Въ томъ-же 28 параграфѣ, чрезъ нѣсколько строкъ, читаемъ: «Вслѣдствіе перпен

дикулярности прямой CO къ AB, углы AOC и COB равны между собою (§ 24)»· здѣсь надобно повторять опредѣленіе перпендикуляра т. е. *прямая линія называется перпендикулярною къ другой прямой, если она составляетъ съ этою послѣднею* **равные** *смежные углы*

СОДЕРЖАНІЕ

НАЧАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

ВВЕДЕНІЕ.

1 Пространство безпредѣльное и ограниченное. — Три рода протяженій: объемы, поверхности и линіи. — Предметъ Геометріи. — Прямая линія; приписываемыя ей свойства; ея измѣреніе. — Плоскость. — Раздѣленіе Начальной Геометріи.

§ 1. Всякое тѣло занимаетъ опредѣленную часть безпредѣльнаго пространства.

Часть безпредѣльнаго пространства, занимаемая тѣломъ называется его *объемомъ* или *геометрическимъ тѣломъ*

§ 2. Всякое тѣло имѣетъ границы или предѣлы, въ которые оно заключено Эти границы называются поверхностями. И такъ, *поверхностью тѣла называется предѣлъ или граница, которая отдѣляетъ его объемъ отъ остальнаго безпредѣльнаго пространства.*

§ 3. Поверхности тѣла имѣютъ также границы, именно тѣ мѣста въ которыхъ встрѣчаются между собою поверхности одного и того же тѣла, и называются *линіями* Поэтому *линіею называется мѣсто встрѣчи двухъ поверхностей.*

§ 4. Линіи имѣютъ также границы: это тѣ предѣлы, въ которыхъ линіи встрѣчаются одна съ другою, и называются точками Поэтому *точкою называется мѣсто встрѣчи двухъ линій.*

§ 5. Величина линіи зависитъ только отъ ея длины, ширины она вовсе не имѣетъ; поэтому говорятъ что *линія имѣетъ одно только измѣреніе—въ длину.*

Величина поверхности зависитъ отъ ея длины и ширины т е *по верхность имѣетъ два измѣренія*—въ длину и ширину

Объемъ имѣетъ три измѣренія длину ширину и высоту или глубину.

Объемы, поверхности и линіи называются *протяженіями*

Эти три рода протяженій, т. е. линіи, поверхности и объемы тѣлъ, можно разсматривать независимо одно отъ другаго. Напримѣръ, желая знать высоту амбара, вовсе нѣтъ надобности обращать вниманіе на его длину и ширину; на оборотъ, желая высчитать число досокъ для пастилки пола въ амбарѣ, не для чего брать во вниманіе высоты его, потому что величина пола, т. е. поверхность, зависитъ только отъ длины и ширины амбара. Когда же понадобится узнать количество овса, вмѣщающагося въ амбарѣ, тогда разсматривается объемъ, потому что количество овса будетъ въ зависимости отъ длины ширины и высоты амбара

§ 6. Свойства протяженій и способы измѣренія ихъ составляютъ предметъ *Геометріи.*

Для простоты, разсматриваютъ линіи независимо отъ поверхностей а поверхности независимо отъ объемовъ. При этомъ надобно твердо помнить, что линіи и поверхности, разсматриваемыя какъ сейчасъ сказано, т. е независимо отъ тѣла, можно представлять только въ воображеніи и слѣдовательно линіи, проводимыя на бумагѣ или доскѣ, не составляютъ дѣйствительныхъ линій; въ самомъ дѣлѣ, какъ бы тонко не проведена была черта карандашемъ, она имѣетъ, кромѣ длины, ширину и толстоту, слѣдовательно эта черта есть тѣло, и отнюдь не геометрическое тѣло, потому что оно состоитъ изъ вещества, именно графита; геометрическое же тѣло или объемъ есть только пространство занимаемое тѣломъ. Тоже надобно сказать и о точкѣ, означаемой на доскѣ или на бумагѣ

§ 7. Всякій понимаетъ что такое прямая линія: изображеніемъ ея можетъ служить ребро вѣрной линейки. Каждый убѣжденъ и въ томъ что *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*

Истина, сама по себѣ очевидная, называется *аксіомою*

Относительно прямой линіи, мы принимаемъ за аксіомы слѣдующія ея свойства

Аксіома 1-я

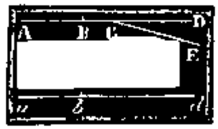
§ 8 *Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*

Аксіома 2-я

§ 9 *Между двумя точками можно провесть только одну прямую линію*

Предложеніе *).

§ 10. *Двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки, сливаются на всемъ своемъ протяженіи, т. е. составляютъ одну прямую линію*



Фиг. 1

Пусть даны двѣ прямыя линіи, одна AD, другая *ad*. Наложимъ одну изъ нихъ *ad* на другую AD и допустимъ что точка *a* легла на A, а точка *b* пришлась въ B Тогда обѣ прямыя линіи между точками A и B сольются, потому что между двумя точками A и B можно провесть только одну прямую (см. § 9).

Остается убѣдиться, что обѣ прямыя сольются и за точками A и B Допустимъ, что въ точкѣ C обѣ линіи расходятся, такъ что *ad* приметъ положеніе ABCE. Станемъ обращать эту линію на точкѣ A, такъ чтобы одна изъ ея точекъ, напр. E, упала на прямую ABCD, напримѣръ въ точку D. При этомъ движеніи, всѣ точки прямой ABCE, кромѣ A, перемѣстятся, и тѣ изъ нихъ, которыя находились на прямой ABD отдѣлятся отъ этой линіи; и потому между точками A и D получатся двѣ прямыя линіи, что противно аксіомѣ 2-й. Такое невѣрное заключеніе получено въ слѣдствіе предположенія, что прямыя линіи AD и *ad*, имѣя двѣ общія точки A и B, разошлись; отсюда заключаемъ, что предположеніе, будто прямыя разошлись въ точкѣ C, невѣрно, и слѣдовательно необходимо допустить, что онѣ сливаются въ одну прямую линію.

§ 11. *Слѣдствіе Двумя точками опредѣляется положеніе прямой линіи.*

И дѣйствительно, если вообразимъ, что чрезъ двѣ точки проведена сперва одна прямая линія, а потомъ другая то эти двѣ прямыя линіи

---

*) *Предложеніе* или *теорема* есть истина въ справедливости которой убѣждаемся рядомъ сужденій.

будутъ имѣть двѣ общія точки, а мы сейчасъ доказали, что двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки, составляютъ одну прямую линію

Примѣчаніе. Очевидно, что чрезъ одну какую нибудь точку можно провесть множество прямыхъ линій слѣдовательно одна точка не опредѣляетъ положенія прямой линіи.

Предложеніе

§ 12 *Двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи имѣютъ только одну общую точку.*

Дѣйствительно, еслибъ эти линіи имѣли другую общую точку, то на основаніи предъидущаго предложенія, онѣ совмѣстились бы и составили одну прямую.

§ 13. Разстояніе между двумя точками есть опредѣленная длина которую можно измѣрить. Съ этою цѣлью берутъ *единичную мѣру длины,* напримѣръ *аршинъ,* и укладываютъ его на измѣряемую длину: если аршинъ уложится ровное число разъ, напр. 3 раза, то длина прямой равна 3-мъ аршинамъ. Если же аршинъ уложится неровное число разъ, напримѣръ 3 раза съ остаткомъ то длину этого остатка опредѣляютъ числомъ *вершковъ*; съ этою цѣлью приставляютъ къ остатку аршинъ, раздѣленный на вершки: пусть этотъ остатокъ содержитъ ровно 7 вершковъ, тогда длина прямой равна 3-мъ аршинамъ $+$ 7 вершковъ. Если же остатокъ не содержитъ въ себѣ ровное число вершковъ, а напримѣръ 7 вершковъ съ остаткомъ, то этотъ послѣдній остатокъ опредѣляютъ въ частяхъ вершка, приклнувъ къ нему вершокъ, раздѣленный на равныя части: если онъ занимаетъ 3 части вершка, раздѣленнаго на 4 равныя части то онъ равенъ $^3/_4$ вершка а вся линія 3 арш. $+ 7^3/_4$ вершка.

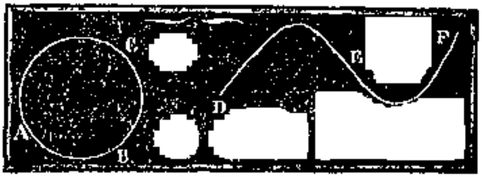
Примѣчаніе. Если, говоря о прямой линіи, ничего несказано объ ея *длинѣ*, то надобно разумѣть эту прямую линію продолженною неопредѣленно въ обѣ стороны

§ 14 *Ломанною линіею* называется послѣдовательное соединеніе нѣсколькихъ прямыхъ. Напр. ABCDE есть ломанная линія, она состоитъ изъ прямыхъ AB BC, CD и DE (фиг. 2).

Фиг 2

§ 15. *Кривою линіею* называется всякая линія, не прямая и не состоящая изъ прямыхъ линій Напр ABC, DEF суть кривыя линіи (фиг. 3).

§ 16. Между двумя точками, какъ извѣстно, можно провесть только одну прямую (см. § 9), ломанныхъ же и кривыхъ линій можно провести сколько угодно; самая меньшая изъ этихъ линій будетъ прямая, потому что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками (см. § 8).



Фиг. 3.

§ 17. Какъ линіи бываютъ прямыя и кривыя, такъ и поверхности раздѣляются на прямыя и кривыя.

Прямая поверхность или *плоскость есть поверхность такого свойства, что прямыя линіи, проведенныя чрезъ всякія двѣ ея точки, всѣми своими точками лежатъ на этой поверхности* *)

Говоря о плоскости, надобно разумѣть что она продолжена во всѣ стороны сколько угодно, безконечно.

Изъ предъидущаго опредѣленія слѣдуетъ, что прямая линія проведенная чрезъ какія нибудь двѣ точки, взятыя на плоскости, на всемъ своемъ протяженіи совмѣщается съ плоскостью.

§ 18. Всякая поверхность, не прямая и несостоящая изъ прямыхъ поверхностей, называется *кривою поверхностью*.

§ 19. Начальная Геометрія раздѣляется на двѣ части: *Геометрія на плоскости*, разсматривающая протяженія, находящіяся въ одной плоскости, и *Геометрія въ пространствѣ*, въ которой разсматриваются протяженія несовмѣщающіяся съ плоскостью какъ напр. объемы.

---

*) Поэтому, чтобы удостовѣриться дѣйствительно ли поверхность тѣла есть плоскость, надобно прикладывать къ ней край вѣрной линейки, въ разныхъ направленіяхъ, и смотрѣть вездѣ ли ребро плотно прилегаетъ къ поверхности.

ЧАСТЬ I

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ

(ПЛАНИМЕТРІЯ)

ОТДѢЛЪ I

Углы линіи перпендикулярныя наклонныя и параллельныя

2 Уголъ; сравненіе, совокупленіе и вычитаніе угловъ. — Углы смежные. Прямой уголъ, перпендикуляръ, линія наклонная. — Сумма угловъ по одну сторону прямой. — Углы: острый, тупой, дополнительный до одного и до двухъ прямыхъ.—Углы противоположные.—Сумма угловъ около точки — Прямыя взаимно-перпендикулярныя.

§ 20 Вообразимъ, что на плоскости проведены двѣ прямыя линіи AB и CD, которыя пересѣкаются въ точкѣ O; какъ линіи такъ и плоскость надобно представлять неопредѣленно продолженными. Эти двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи раздѣляютъ плоскость на четыре части: одна изъ нихъ будетъ заключаться между прямыми OB и OD, другая—между прямыми OB и OC, третья—между OC и OA, четвертая—между OA и OD. Каждая изъ этихъ частей называется *угломъ*.

Фиг 4

И такъ, *угломъ называется часть плоскости между двумя пересѣкающимися прямыми, ограниченными въ ихъ точкѣ пересѣченія*. Эта точка называется *вершиною* угла, а обѣ прямыя—*боками* или *сторонами* его Поэтому точка O—вершина угла BOD, OB и OD—его бока. Уголъ обыкновенно означается тремя буквами, написанными сряду, такимъ образомъ что вершинная

Фиг 5

буква ставится всегда въ серединѣ; поэтому уголъ читается такъ BOD или DOB. Если при вершинѣ находится только одинъ уголъ, то короче будетъ назвать его только одною вершинною буквою т. е. вмѣсто угла BOD сказать уголъ O.

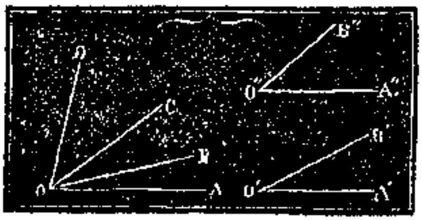
Боками угла принимаются линіи, сколько угодно продолженныя, безконечныя; а какъ прямыя линіи, имѣя двѣ общія точки, сливаются по всемъ протяженіи (§ 10), то заключаемъ, что два угла будутъ равны между собою, если при наложеніи одного на другой бока ихъ совмѣстятся на какомъ нибудь разстояніи отъ вершины. Отсюда ясно, что *величина угла не зависитъ отъ длины его боковъ.*

§ 21. Чтобы сравнить два угла AOB и A'O'B', т. е. узнать, будутъ ли они равные, или, въ случаѣ неравенства, который больше — вообразимъ, что уголъ A'O'B' перемѣщенъ на AOB такъ что вершина O' совпала съ вершиною O и бокъ O'B' — съ бокомъ OB: смотря по тому, гдѣ ляжетъ бокъ O'A' внутри ли угла AOB, или внѣ его, заключаемъ, что уголъ A'O'B', въ первомъ случаѣ, меньше угла AOB, а во второмъ больше его; если же бокъ O'A' совмѣстится съ бокомъ OA, то углы A'O'B' и AOB равны между собою.

Фиг. 6

Въ этомъ состоитъ *сравненіе* двухъ угловъ.

§ 22. Два угла, и вообще нѣсколько угловъ, можно соединить въ одинъ уголъ. Пусть требуется три угла AOB, A'O'B' и A''O''B'' соединить въ одинъ уголъ. Перемѣстимъ уголъ O' такъ, чтобы вершина его совпала съ вершиною O, а бокъ O'A' съ OB угла AOB, и пусть другой бокъ O'B' приметъ положеніе OC такъ, что уголъ BOC = углу O'. Ясно, что уголъ AOC равенъ суммѣ угловъ AOB и A'O'B'.



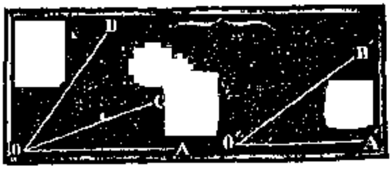
Фиг. 7

Перемѣстимъ уголъ O'' такъ, чтобы его вершина и бокъ O''A'' совпали съ точкою O и прямою OC, и пусть другой бокъ O''B'' приметъ положеніе OD, слѣдовательно уголъ COD = углу O''. Очевидно, что уголъ AOD, равный суммѣ угловъ AOB, BOC и COD, равенъ суммѣ данныхъ угловъ АОВ О и О″, что можно написать такъ:

$$AOD = AOB + A\,O'B' + A''O''B''.$$

Въ этомъ состоитъ *совокупленіе* или *сложеніе угловъ*

§ 22. Чтобы изъ угла АОВ вычесть уголъ А О В перемѣстимъ уголъ О′ такъ, чтобы его вершина и бокъ О В′ совпали съ вершиною О и бокомъ ОВ угла АОВ и пусть другой бокъ О′А′ приметъ положеніе ОС; слѣдовательно уголъ ВОС = углу О′; очевидно, что уголъ АОС составитъ разность между углами АОВ и А′О′В что можно написать такъ:



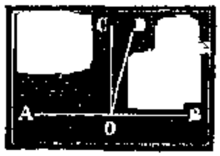
Фиг. 8

$$AOB - A\,O'B' = AOC.$$

§ 23. Если прямую линію АВ встрѣчаетъ другая прямая ОС не переходя за точку пересѣченія О, то образуются два угла АОС и ВОС которые называются *смежными* (фиг. 8).

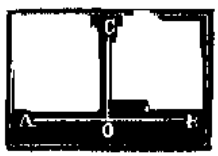
Фиг. 9

§ 24 Проведемъ прямую линію АВ и назначимъ на ней произвольную точку О, чрезъ которую проведемъ прямую OD въ произвольномъ направленіи: получимъ два смежные угла AOD и BOD, положимъ, что уголъ AOD больше угла BOD. Вообразимъ теперь, что прямая OD обращается около точки О, удаляясь отъ прямой ОВ; въ слѣдствіе этого перемѣщенія прямой OD уголъ BOD будетъ увеличиваться, а смежный съ нимъ уголъ AOD будетъ уменьшаться. Очевидно, что прямая OD приметъ на своемъ пути такое положеніе ОС, въ которомъ она составитъ съ линіей АВ два равные смежные угла АОС и ВОС, это мы принимаемъ за аксіому; эти равные смежные углы называются *прямыми углами*, а линія ОС—*перпендикуляромъ* къ линіи АВ.



Фиг. 10.

И такъ, *прямая линія называется перпендикулярною къ другой прямой, если она составляетъ съ этою послѣднею равные смежные углы; углы же эти называются прямыми углами* Напримѣръ, если АОВ прямая и уголъ АОС = ВОС, то прямая СО перпендикулярна къ АВ и углы АОС и ВОС — прямые.



Фиг. 11.

§ 25 Изъ разсужденій, изложенныхъ въ предъидущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что *изъ всякой точки, взятой на прямой линіи, можно провесть* (*возставить*) *перпендикуляръ.*

Пусть CO перпендикулярна къ прямой AB, значитъ уголъ AOC = уг. BOC (фиг. 11); если отклонимъ линію CO въ ту или другую сторону, то одинъ изъ угловъ AOC и BOC увеличится, а другой уменьшится, слѣд. получатся неравные смежные углы. Отсюда заключаемъ, что *изъ всякой точки, взятой на прямой линіи можно провесть* (*возставить*) *одинъ только перпендикуляръ.*

§ 26. Всякая прямая, не перпендикулярная къ другой прямой, т. е составляющая съ этою послѣднею неравные смежные углы называется *наклонною* къ послѣдней. Очевидно, что чрезъ всякую точку, взятую на прямой линіи можно провести къ ней множество наклонныхъ

Предложеніе

§ 27 *Сумма смежныхъ угловъ равна суммѣ какихъ-нибудь другихъ смежныхъ угловъ*, т. е. $AOC + COB = A'O'C' + C'O'B'$.

Наложимъ плоскость $A'B'C'$ на ABC такъ чтобы точка O' совпала съ O и прямая $A'B'$ слилась съ прямою AB, тогда $O'C'$ приметъ такое положеніе OC'', что уголъ $C''OB$ = углу $C'O'B'$ и уголъ AOC'' = углу $A'O'C'$.

Фиг. 12.

Въ суммѣ двухъ угловъ AOC и COB, этотъ послѣдній уголъ можно замѣнить суммою двухъ угловъ COC'' и $C''OB$ И такъ

$$AOC + COB = AOC + COC'' + C''OB$$

но сумму угловъ $AOC + COC''$ можно замѣнить однимъ угломъ AOC'', слѣдовательно

$$AOC + COB = AOC'' + C''OB;$$

а какъ уже замѣчено, что $AOC'' = A'O'C'$ и $C''OB = C'O'B'$ слѣдовательно

$$AOC + COB = A'O'C' + C'O'B'$$

Предложеніе

§ 28. *Всѣ прямые углы равны между собою*

Пусть прямая CO перпендикулярна къ AB, и $C'O'$ перпендикулярна къ прямой $A'B'$; надобно доказать что уголъ AOC равенъ углу $A'O'C'$

Мы доказали (§ 27), что сумма всякихъ двухъ смежныхъ угловъ AOC и COB равна суммѣ другихъ двухъ смежныхъ угловъ A O'C' и C'O'B' т е. AOC + COB = A'O C'+C'O'B'. Въ слѣдствіе перпендикулярности прямой CO къ AB углы AOC и COB равны между собою (§ 24), и каждый изъ нихъ прямой· тоже скажемъ и объ углахъ

Фиг. 13

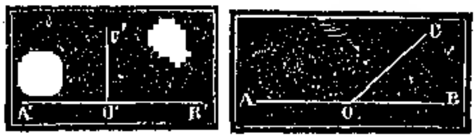
A'O C' и C O'B' слѣд 2AOC=2A O C, отсюда AOC=A O C.

Прямой уголъ вездѣ одинаковъ, постояненъ, потому что всѣ прямые углы равны между собою; на этомъ основаніи всѣ углы сравниваютъ съ прямымъ угломъ, т. е. прямой уголъ принимается за единицу при измѣреніи угловъ; такъ напримѣръ, говорятъ: сумма такихъ-то угловъ равна двумъ прямымъ, тремъ прямымъ и т. д. или такой-то уголъ составляетъ $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. прямаго угла

Предложеніе.

§ 29. *Сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ*

Пусть AOC и COB суть смежные углы; надобно доказать что сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ. Изъ какой нибудь точки O' произвольной прямой линіи A'B проведемъ O'C' перпендикулярно къ A'B': получимъ прямые углы A'O'B' и C'O'B' (§24); сумма ихъ составитъ два прямые А какъ сумма смежныхъ AOC и COB равна суммѣ другихъ смежныхъ угловъ A'O'B' и C'O'B' (§ 27), то AOC+COB=2 прямымъ угламъ



Іиг. 14

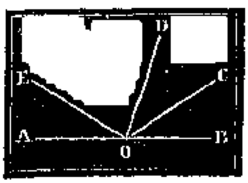
Предложеніе

§ 30. *Сумма всѣхъ угловъ по одну сторону прямой равна двумъ прямымъ угламъ.*

Надобно доказать что

AOE + EOD + DOC + COB = 2 прямымъ

Мы уже доказали въ предъидущемъ предложеніи, что сумма смежнымъ угловъ, напр. AOE и EOB равна 2-мъ прямымъ: но уголъ EOB = EOD + DOC + COB, слѣдовательно



Іиг. 15

AOE + EOD + DOC + COB = 2 прямымъ

§ 31 Всякій уголъ, который меньше прямаго, называется *острымъ* угломъ; а уголъ, который больше прямаго и меньше двухъ прямыхъ, называется *тупымъ*. Напримѣръ AOE—острый уголъ, EOB—тупой

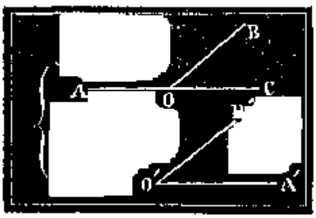
§ 32. Въ суммѣ двухъ угловъ, составляющей два прямые, каждый изъ слагаемыхъ угловъ называется *дополненіемъ* другаго угла до двухъ прямыхъ. Легко понять, что *два угла равны между собою, если они имѣютъ равныя дополненія до двухъ прямыхъ*. И дѣйствительно если углы a и b имѣютъ равныя дополненія, которыя назовемъ одною буквою c, то получимъ $a+c=b+c$, потому что каждая сумма равна 2 прямымъ; изъ этого равенства получимъ $a=b$.

§ 33. Въ суммѣ двухъ угловъ, составляющей прямой уголъ, каждый изъ слагаемыхъ угловъ называется *дополненіемъ* другаго угла до прямаго. Ясно, что *два угла равны между собою, если имѣютъ равныя дополненія до прямаго,* объясненіе тоже самое, что и въ предъидущемъ параграфѣ.

Предложеніе

§ 34. *Изъ двухъ взаимно-дополнительныхъ угловъ до двухъ прямыхъ угловъ можно составить смежные углы*, т. е. *когда у двухъ взаимно-дополнительныхъ угловъ до двухъ прямыхъ есть общая вершина и общій бокъ, тогда другіе ихъ бока составляютъ прямую линію.*

Пусть углы AOB и A'O B' взаимно дополнительные до 2-хъ прямыхъ. Продолживъ прямую AO, получимъ уголъ BOC, смежный съ AOB и служащій дополненіемъ до двухъ прямыхъ углу AOB (§ 29). По условію уголъ A'O'B' также дополняетъ AOB до двухъ прямыхъ; поэтому A'O B' = BOC (§ 32). Теперь, если мы перемѣстимъ уголъ A'O'B' такъ, чтобы вершина его O' совпала съ O, а бокъ O'B' съ OB, то, по равенству угловъ A'O'B' и BOC, другой бокъ O A' пойдетъ по OC: такимъ образомъ бока AO и O'A составятъ прямую линію и слѣд. углы AOB и A'O B сдѣлаются смежными

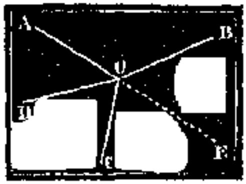


Фиг. 16

Предложеніе

§ 35. *Сумма всѣхъ угловъ, которые лежатъ около одной общей имъ вершины равна четыремъ прямымъ угламъ*

Надобно доказать, что сумма угловъ AOB BOC COD и DOA равна четыремъ прямымъ угламъ.



Фиг. 17

Продолжимъ какой нибудь бокъ, наприм. AO и пусть OE составляетъ это продолженіе Сумма угловъ по одну сторону прямой AE равна двумъ прямымъ (§ 30); слѣдовательно.

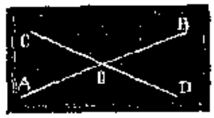
AOB+BOE=2 прямымъ,

по той же причинѣ AOD+DOC+COE=2 прямымъ

сложимъ эти равенства и замѣнимъ въ суммѣ два угла BOE и COE однимъ угломъ BOC; тогда получимъ

AOB+AOD+DOC+BOC=4 прямымъ

§ 36. Мы уже видѣли, что двѣ пересѣкающіяся прямыя образуютъ четыре угла; изъ нихъ для каждаго угла, напр. AOC есть два смежные AOD и COB, и одинъ *противоположный* уголъ или *перемежный* BOD. Для угла BOC противоположный будетъ AOD. И такъ *два угла называются противоположными или перемежными, если бока одного изъ нихъ составляютъ продолженія боковъ другаго.*



Фиг. 4

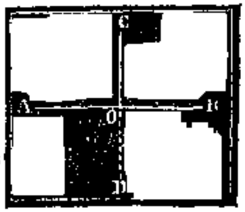
Предложеніе

§ 37. *Противоположные углы равны между собою* (фиг 4)

Надобно доказать, что уголъ AOC = BOD и AOD = BOC. Углы AOC и AOD суть смежные, слѣдов. каждый изъ нихъ служитъ дополненіемъ другому до 2-хъ прямыхъ (§ 29), углы BOD и AOD так же смежные, слѣдов. составляютъ дополненіе другъ другу до 2-хъ прямыхъ (§ 29) И такъ два угла AOC и BOD имѣя одно и тоже дополненіе уголъ AOD до 2 хъ прямыхъ, равны между собою (§ 32)

Предложеніе

§ 38. *Если прямая перпендикулярна къ другой прямой то и продолженіе ея перпендикулярно къ той же прямой.*



Фиг 18

Пусть OC перпендикулярна къ AB а OD составляетъ продолженіе прямой OC; надобно доказать что OD перпендикулярна къ AB

Двѣ пересѣкающіяся линіи составляютъ равные противоположные углы (§ 37), слѣдовательно

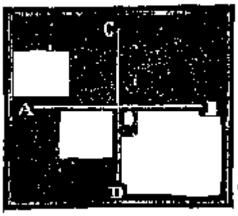
уголъ AOD=BOC

и уголъ BOD—AOC;

а по равенству прямыхъ угловъ BOC и AOC (§ 24) заключаемъ, что уголъ AOD=BOD, т е. два смежные угла AOD и BOD равны между собою, слѣд они прямые, а линія OD перпендикулярна къ AB (§ 24).

Предложеніе.

§ 39. *Если прямая перпендикулярна къ другой прямой то и эта послѣдняя перпендикулярна къ первой.*



Фиг. 18.

Положимъ, что CD перпендикулярна къ AB надобно доказать, что AB перпендикулярна къ CD.

Уголъ AOD равенъ своему противоположному BOC а какъ этотъ послѣдній прямой, то уголъ AOD прямой; уголъ AOC также прямой, потому что CD перпендикулярна къ AB, слѣдовательно смежные углы AOC и AOD равны между собою (§ 28), и AO а слѣдовательно и ея продолженіе BO перпендикулярны къ CD (§§ 24, 38)

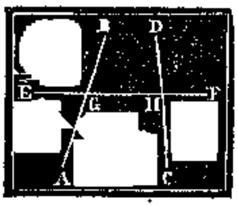
Поэтому, двѣ прямыя AB и CD называются *взаимно перпендикулярными.*

---

3. Названіе угловъ, составляемыхъ двумя прямыми съ сѣкущею: случай когда эти двѣ прямыя пересѣкаются и когда сумма внутреннихъ угловъ по одну сторону сѣкущей равна двумъ прямымъ — Допущеніе постулата о встрѣчѣ наклонной съ перпендикуляромъ.

§ 40. Отъ пересѣченія двухъ прямыхъ третьею прямою, *сѣкущею*, образуются восемь угловъ, которымъ даютъ особыя названія.

Пусть AB и CD суть двѣ прямыя, разсѣченныя прямою EF.



Фиг. 19

Четыре угла DHG, GHC, BGH, AGH, которыхъ отверстія находятся между линіями AB и CD, называются *внутренними*, а остальные четыре угла DHF, FHC, BGE и EGA, которыхъ отверстія находятся внѣ прямыхъ AB и CD, называются *внѣшними*. Прямая EF называется *сѣкущею*.

Два внутренніе угла, лежащіе по ту и другую сторону сѣкущей и несмежные, называются *внутренними противоположными* или *внутренними перекрестными*, напр. DHG и HGA, а также GHC и BGH.

Два внѣшние угла, лежащие по ту и другую сторону сѣкущей и несмежные, называются *внѣшними противоположными* или *внѣшними перекрестными*: DHF и EGA, а также FHC и BGE.

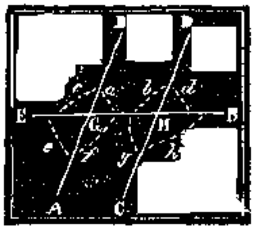
Два несмежные угла, одинъ внутренній, другой внѣшній, по одну сторону сѣкущей, называются *соотвѣтственными* или *соотвѣтствующими*; такъ DHF, и BGH, DHG и BGE, FHC и AGH, CHE и AGE суть соотвѣтственные углы

Предложеніе

§ 41. *Если сумма двухъ внутреннихъ угловъ по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ, то*

1) *сумма двухъ внѣшнихъ угловъ по одну сторону сѣкущей равна двумъ прямымъ.*
2) *внутренніе противоположные углы равны между собою*
3) *внѣшніе противоположные углы равны между собою.*
4) *соотвѣтственные углы равны между собою.*

Пусть сумма внутреннихъ угловъ a и b равна двумъ прямымъ, или 2D, означая при этомъ буквою D одинъ прямой уголъ; и такъ положимъ что



Фиг 20

$$a + b = 2D.$$

1) Надобно доказать, что $c + d = 2D$. Углы a и c, а также b и d смежные, а намъ извѣстно, что сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ; слѣдовательно сумма этихъ четырехъ угловъ равна четыремъ прямымъ, т е

$$a + c + b + d = 4D$$

а какъ по условію $a + b = 2D$

то вычтя второе равенство изъ перваго, получимъ

$$c + d = 2D,$$

значитъ, сумма внѣшнихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей дѣйствительно равна двумъ прямымъ угламъ

Въ равенствѣ $a + b = 2D$ можно замѣнить a и b противоположными имъ углами e и h: слѣдовательно

$$e + h = 2D,$$

гдѣ e и h суть внѣшние углы по одну сторону сѣкущей

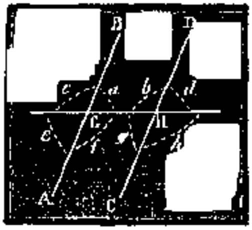
Замѣтимъ еще, что когда сумма внутреннихъ угловъ a и b, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ, то и сумма другихъ двухъ внутреннихъ угловъ f и g равна двумъ прямымъ И дѣйствительно если въ равенство

$$c+d=2D$$

вставимъ, вмѣсто угла c равный ему противоположный уголъ f и вмѣсто d противоположный ему уголъ g, то получимъ

$$f+g=2D$$

2) Дано $a+b=2D$ докажемъ равенство внутреннихъ противоположныхъ угловъ: $a=g$, $b=f$. Углы g и b смежные слѣдовательно сумма ихъ равна 2-мъ прямымъ; а какъ сумма угловъ a и b по условію, также равна 2-мъ прямымъ, то углы a и g имѣютъ общее дополненіе b до двухъ прямыхъ, слѣдовательно $a=g$



Фиг 20

Также докажется равенство $b=f$.

3) Дано $a+b=2D$; надобно доказать равенство внѣшнихъ противоположныхъ угловъ, т. е что $e=d$, $h=c$.

Мы сейчасъ доказали равенство внутреннихъ противоположныхъ угловъ: $a=g$
но $a=e$, $g=d$ (§ 37), слѣдовательно

$$e=d.$$

Такъ какъ внутр противоположные углы равны то $b=f$,
а какъ $b=h$, $f=c$ (§ 37), то $h=c$.

4) Дано $a+b=2D$; надобно доказать равенство соотвѣтственныхъ угловъ, напримѣръ $a=d$

Мы доказали равенство внутреннихъ противоположныхъ угловъ слѣдовательно $a=g$;
но уголъ g равенъ своему противоположному d (§ 37) слѣдовательно $a=d$

Также докажутся равенства остальныхъ соотвѣтственныхъ угловъ $b=c$ $f=h$, $g=e$.

§ 42. Слѣдствіе. *Всякое равенство, выраженное въ предложеніи предъидущаго параграфа влечетъ за собою остальныя равенства.* Въ самомъ дѣлѣ

1) Пусть сумма внѣшнихъ угловъ, напримѣръ, c и d, по одну сторону сѣкущей, равна 2-мъ прямымъ, т. е. $c+d=2D$. Углы a и c а также b и d смежные, слѣдовательно

$$a+c+b+d=4D$$

по условію $c+d=2D$

слѣдовательно $a+b=2D$,

т е. сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ. Доказавъ это равенство, заключаемъ объ остальныхъ равенствахъ на основаніи предъидущаго предложенія (§ 41).

2) Пусть внутреннія противуположные углы равны между собою на примѣръ, $a=g$. Смежные углы b и g доставляютъ равенство

$$b+g=2D.$$

Вставимъ сюда вмѣсто g равное ему a, получимъ

$$b+a=2D$$

Поэтому сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна 2D; а это равенство влечетъ за собою и остальныя равенства изложенныя въ предъидущемъ предложеніи (§ 41).

3) Пусть внѣшніе противоположные углы равны между собою, напр. $d=e$. Извѣстно, что $d=g$, $e=a$ (§ 37), слѣд. $g=a$; а мы сейчасъ доказали (2-е), что это равенство влечетъ и остальныя.

4) Пусть соотвѣтственные углы равны между собою, напримѣръ $a=d$ Углы b и d смежные, слѣдовательно

$$b+d=2D$$

вставимъ сюда вмѣсто d равное ему a, получимъ

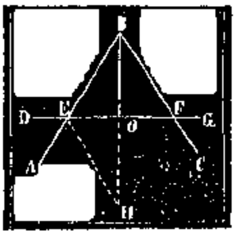
$$b+a=2D;$$

а это равенство влечетъ за собою и остальныя равенства (§ 41)

Предложеніе

§ 43. *Если двѣ пересѣкающіяся прямыя разсѣчены сѣкущею то сумма внутреннихъ угловъ, на бокахъ которыхъ лежитъ точка встрѣчи, меньше двухъ прямыхъ угловъ.*

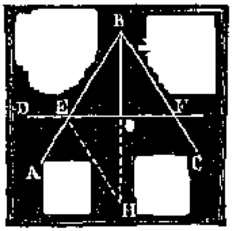
Возьмемъ двѣ прямыя AB и BC, пересѣкающіяся въ точкѣ B разсѣчемъ ихъ прямою DG. Надобно доказать, что сумма внутреннихъ угловъ BFE и BEF меньше двухъ прямыхъ угловъ; на бокахъ этихъ угловъ находится точка встрѣчи B Пусть O означаетъ середину прямой EF; соединивъ точку O съ B, и, продолживъ прямую BO отложимъ OH, равную BO, а точку H соединимъ съ точкою E прямую EH.



Фиг 21

Докажемъ, что уголъ HEF равенъ углу BFE Такъ какъ противоположные углы HOE и BOF равны между собою

(§ 37), то совмѣстимъ ихъ, притомъ такъ, чтобы бокъ OE пришелся на OF тогда по-равенству прямыхъ OE и OF, точка E совпадетъ съ точкою F; а по равенству прямыхъ OH и OB, точка H совпадетъ съ точкою B. И такъ концы прямой EH совпали съ концами прямой FB, именно точка E съ F, а H съ B; значитъ и прямая EH совпадетъ съ FB (§ 10); отсюда заключаемъ, что и бока угла HEO совпали съ боками угла BFO; слѣдовательно уголъ HEO = углу BFO

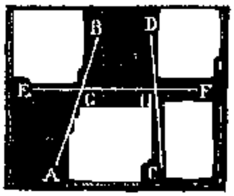


Фиг. 21

Очевидно, что уголъ HEB меньше двухъ прямыхъ угловъ, значитъ и сумма угловъ HEF+BEF будетъ меньше двухъ прямыхъ, а какъ уголъ HEF=углу BFE то и сумма угловъ BFE+BEF меньше двухъ прямыхъ угловъ

§ 44. Слѣдствіе I. *Если двѣ пересѣкающіяся прямыя разсѣчены сѣкущею, то внѣшній уголъ, на бокѣ котораго лежитъ точка пересѣченія, больше соотвѣтственнаго ему внутренняго угла.*

Пусть AB и CD пересѣкаются, а прямая EF—ихъ сѣкущая. Надобно доказать, что внѣшній уголъ DHF больше соотвѣтственнаго ему угла BGH Мы уже доказали, что сумма внутреннихъ угловъ BGH и DHG меньше двухъ прямыхъ, а какъ, вмѣсто двухъ прямыхъ угловъ, можно взять сумму смежныхъ угловъ DHG и DHF, слѣдоват BGH+DHG<DHF+DHG; отнявъ отъ этихъ неравныхъ суммъ по углу DHG, получимъ уголъ BGH меньше угла DHF или, что тоже, уголъ DHF больше угла BGH



Фиг. 19

§ 45. Слѣдствіе II. *Если двѣ пересѣкающіяся прямыя разсѣчены сѣкущею, то каждые два внутренніе противоположные угла, а также внѣшніе противоположные угла неравны между собою.*

Пусть AB и CD пересѣкаются, а EF—ихъ сѣкущая (ф. 19). Надобно доказать что напримѣръ, внутренніе противоположные углы DHG и AGH неравны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе пересѣченія прямыхъ AB и CD сумма внутреннихъ угловъ DHG+BGH меньше двухъ прямыхъ или меньше AGH+BGH, ибо эти два угла смежные, т. е.

DHG+BGH<AGH+BGH

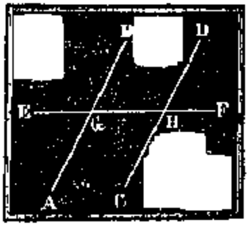
Отсюда слѣдуетъ, что уголъ DHG меньше угла AGH

Замѣнивъ эти два угла противоположными имъ (§ 37), найдемъ, что уголъ CHF меньше угла BGE т. е. что внѣшніе противоположные углы неравны между собою

Предложеніе

§ 46. *Если двѣ прямыя линія составляютъ съ сѣкущею такіе внутренніе углы, по одну изъ ея сторонъ, что сумма ихъ равна двумъ прямымъ, то эти двѣ прямыя, не пересѣкутся, сколько бы ихъ не продолжали.*

Пусть сѣкущая EF, пересѣкая прямыя AB и CD, образуютъ внутренніе углы BGH и DHG, которыхъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ. Надобно доказать, что прямыя линіи AB и CD не могутъ пересѣчься, па всемъ ихъ протяженіи. Дѣйствительно, еслибъ мы допустили, что эти линіи пересѣкаются по ту сторону прямой EF, то на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 43, заключили бы, что сумма внутреннихъ угловъ BGH+DHG, на бокахъ которыхъ лежитъ точка встрѣчи была бы меньше 2-хъ прямыхъ



Фиг. 22

угловъ; а это противорѣчитъ условію, по которому эта сумма равна двумъ прямымъ, слѣд. прямыя линіи AB и CD не могутъ пересѣчься по ту сторону сѣкущей EF. Онѣ не могутъ встрѣтиться и по сю сторону сѣкущей EF; въ самомъ дѣлѣ, допустивъ встрѣчу этихъ линій, найдемъ, на основаніи того же предложенія, изложеннаго въ § 43, что сумма угловъ AGH+CHG будетъ меньше двухъ прямыхъ угловъ, а отсюда слѣдуетъ, что сумма угловъ BGH+DHG будетъ больше двухъ прямыхъ (потому что сумма всѣхъ упомянутыхъ четырехъ угловъ равна 4-мъ прямымъ), а это противно условію, по которому сумма угловъ BGH+DHG=2 прямымъ.

§ 47. Слѣдствіе. *Двѣ прямыя не могутъ пересѣчься:*

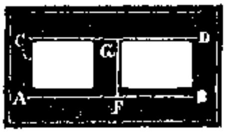
1) *если сумма внѣшнихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;* или
2) *если внутренніе противоположные углы равны между собою,* или
3) *если внѣшніе противоположные углы равны между собою* или
4) *если соотвѣтственные углы равны между собою.*

И дѣйствительно, каждый изъ этихъ случаевъ ведетъ за собою ра венство суммы внутреннихъ угловъ по одну сторону сѣкущей, двумъ прямымъ угламъ (§ 42), а при такомъ условіи линіи не пересѣкаются (§ 46).

Предложеніе

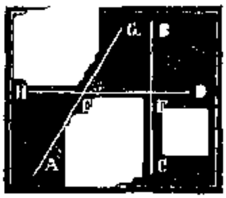
§ 48. *Двѣ прямыя линіи, перпендикулярныя порознь къ третьей, не пересѣкаются.*

Вообразимъ, что къ прямой FG проведены перпендикуляры AB и CD; надобно доказать, что они не встрѣтятся. Дѣйствительно, вслѣдствіе перпендикулярности, углы BFG и DGF—прямые, слѣд сумма ихъ равна 2-мъ прямымъ угламъ, а какъ эти два внутреніе угла лежатъ по одну сторону сѣкущей FG то прямыя AB и CD не могутъ встрѣтиться (§ 46).



Фиг 23

§ 49 Если на прямой HD возьмемъ какія нибудь двѣ точки F и E и проведемъ двѣ прямыя линіи: одну BC перпендикулярно къ линіи HD, а другую AG наклонную къ той же линіи, то перпендикуляръ пересѣчется съ наклонною, при достаточномъ продолженіи ихъ. Не смотря на очевидность этой истины, геометры не могли доказать ее; а потому, не останавливаясь на опытахъ доказательствъ этой истины, мы допустимъ ее въ видѣ *постулата* или *требованія* И такъ



Фиг. 24.

Постулатъ

Наклонная и перпендикуляръ, къ одной и той же прямой линіи, по достаточномъ ихъ продолженіи, всегда пересѣкутся

§ 50 Припомнимъ, что мы разсматриваемъ линіи на одной плоскости, притомъ линіи предполагаются продолженными сколько угодно Если провесть на плоскости прямую линію, а потомъ другую прямую то эта послѣдняя можетъ пересѣчь или не пересѣчь первую линію; другихъ положеній не можетъ быть. Въ первомъ случаѣ линіи называются *пересѣкающимися* и образуютъ четыре угла около точки встрѣчи Еслижъ линіи не встрѣчаются, то называются *параллельными*, онѣ угла собою не составляютъ. Въ существованіи параллельныхъ линій, мы убѣдились помощію предъидущихъ трехъ предложеній (§§ 46,47 48)· дѣйствительно во всѣхъ этихъ случаяхъ двѣ прямыя находясь на одной плоскости, не могутъ пересѣчься сколько бы ихъ ни продолжали, а такія линіи, какъ сейчасъ сказано называются параллельными линіями

Свойства перпендикуляра и наклонныхъ

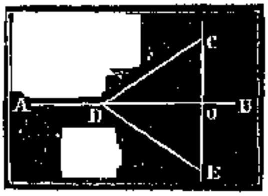
1 Перпендикуляръ, опущенный изъ точки на прямую. Свойства наклонныхъ встрѣчающихъ сѣкущую въ равныхъ и неравныхъ разстояніяхъ отъ основанія перпендикуляра. Разстояніе отъ точки до линіи.

Предложеніе

§ 51. *Изъ всякой точки, взятой внѣ прямой линіи, можно всегда опустить на нее перпендикуляръ, и притомъ только одинъ*

1) Пусть требуется провесть перпендикуляръ изъ точки C къ прямой линіи AB

Произвольную точку D прямой линіи AB соединимъ съ данною точкою C, получатся два смежные угла; если они равны между собою то прямая CD будетъ перпендикулярна къ AB. Положимъ, что эти углы неравны, напримѣръ CDB меньше ADC; построимъ уголъ BDE, равный углу CDB, и отложимъ DE равное DC, наконецъ, соединимъ точку E съ данною точкою C; полученная такимъ образомъ прямая CE будетъ перпендикулярна къ AB. Въ самомъ дѣлѣ, перегнувъ плоскость чертежа на прямой AB, какъ на оси, такъ, чтобы плоскость ABE легла на плоскость ABC, найдемъ что, по равенству угловъ EDB и CDB, бокъ DE пойдетъ по DC, а, по равенству боковъ DE и DC, точка E совпадетъ съ C; слѣдовательно прямая OE совпадетъ съ OC (§ 10), а вмѣстѣ съ тѣмъ и уголъ EOD совпадетъ съ угломъ DOC И такъ прямая AO составляетъ равные смежные углы съ CE значитъ AO перпендикулярна къ CE (§ 24), и CE перпендикулярна къ AB (§ 39)



Фиг. 25

И такъ мы доказали, что изъ всякой точки C, взятой внѣ прямой AB можно опустить на нее перпендикуляръ

2) Пусть прямая CO перпендикулярна къ AB; надобно доказать, что всякая другая прямая CD, проведенная изъ точки C къ прямой AB, будетъ наклонная. Относительно двухъ пересѣкающихся прямыхъ DC и OC, линія AB есть сѣкущая, а потому внѣшній уголъ BOC,

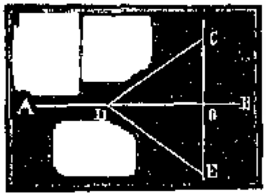
на бокѣ котораго находится точка пересѣченія C, больше соотвѣтствен наго ему угла CDO (§ 44); а какъ BOC прямой, то CDO острый, а съ тѣмъ вмѣстѣ CD наклонная къ прямой AB (§§ 31 26)

Точка O называется *основаніемъ перпендикуляра*

Предложеніе.

§ 52. *Если изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, провесть къ ней перпендикуляръ и наклонную, то перпендикуляръ короче наклонной*

Пусть CO перпендикулярна къ AB, а CD наклонная; надобно доказать, что CO меньше CD. Продолжимъ перпендикуляръ CO и отложимъ OE=OC, точку E соединимъ съ D



Фиг. 25.

Если перегнуть плоскость на прямой линіи AB какъ на оси, то по равенству прямыхъ угловъ DOE и DOC прямая OE пойдетъ по OC, а по равенству прямыхъ OE и OC, точка E упадетъ въ C; слѣдовательно прямая DE совмѣстится съ DC, поэтому DE = DC. Прямая линія CE короче ломанной CDE, проведенной между точками C и E (§ 16); слѣдовательно CO, какъ половина CE, будетъ короче CD, составляющей также половину ломанной CDE

Предложеніе

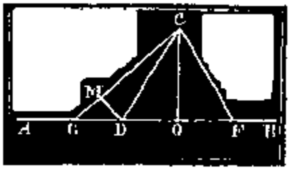
§ 53. *Если изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, проведены къ ней перпендикуляръ и наклонныя, то 1) тѣ наклонныя, которыя равно-отстоятъ отъ основанія перпендикуляра, равны между собою и составляютъ равные углы съ прямой, 2) изъ двухъ наклонныхъ, различно удаленныхъ отъ основанія перпендикуляра, та больше, которая отстоитъ отъ него дальше*

1) Изъ какой нибудь точки C проведемъ перпендикуляръ CO къ прямой AB· отъ точки O *основанія* перпендикуляра отложимъ равныя части OD=OF, наконецъ проведемъ наклонныя CD и CF, надобно доказать, что CD=CF. Перегнемъ плоскость чертежа на линіи CO какъ на оси; при этомъ OD пойдетъ по OF, по равенству прямыхъ угловъ COD=COF, а по равенству линій OD = OF точка D упадетъ въ F и прямыя DC и FC у

Фиг 26.

которыхъ есть двѣ общія точки, совпадутъ одна съ другой, слѣдовательно онѣ равны между собою, и уголъ CDO равенъ CFO, ибо они совмѣстились

2) Пусть CO перпендикулярна AB, и OG больше OF; надобно доказать, что наклонная CG больше наклонной CF Отложимъ OD=OF при этомъ точка D необходимо упадетъ между O и G, потому что OG больше OF; проведемъ наклонную CD, которая равна CF ибо онѣ равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра. И такъ докажемъ, что CG больше наклонной CD. Съ этою цѣлью возставимъ перпендикуляръ изъ точки D къ прямой CD онъ пойдетъ внутри угла ADC, потому что этотъ послѣдній какъ внѣшній для пересѣкающихся прямыхъ CD и CO, при сѣкущей AB, больше соотвѣтственнаго ему прямаго угла COD (§ *44*); значитъ этотъ перпендикуляръ проходя въ углѣ ADC, пересѣчетъ наклонную CG въ точкѣ M.



Фиг 27

Изъ точки C къ прямой DM проведенъ перпендикуляръ CD и наклонная CM, слѣдовательно наклонная CM больше перпендикуляра CD и подавно CG больше CD, потому что CG больше CM

Предложеніе.

§ 54. Обратно. *двѣ равныя наклонныя равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра.*

Дѣйствительно, если бъ эти наклонныя неравно удалялись отъ основанія перпендикуляра, то онѣ были бы неравны между собою (§ 53 2 е) что противно условію

Предложеніе

§ 55. *Изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, нельзя провесть къ ней трехъ равныхъ наклонныхъ*

Въ самомъ дѣлѣ, если изъ данной точки провесть перпендикуляръ къ прямой, то могутъ представиться три случая:

1) Перпендикуляръ совпадетъ съ одною изъ этихъ трехъ линій, тогда эта линія будетъ короче остальныхъ двухъ (§ 52);

2) двѣ линіи будутъ по одну сторону перпендикуляра, слѣдовательно онѣ неравны (§ 53, 2-е);

3) всѣ три линіи придутся по одну сторону перпендикуляра, слѣдовательно всѣ три будутъ различной длины (§ 53, 2-е).

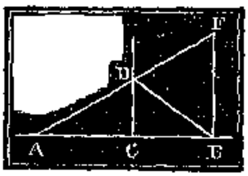
§ 56. *Разстояніе отъ точки до прямой измѣряется перпендикуляромъ, проведеннымъ изъ этой точки къ прямой;* потому что изъ точки на прямую можно опустить одинъ только перпендикуляръ и онъ короче всякой прямой линіи, соединяющей эту точку со всякою точкою прямой (§ 52)

Предложеніе.

§ 57. *Всякая точка перпендикуляра, возстановленнаго изъ середины прямой, равно-отстоитъ отъ концовъ этой прямой; а всякая точка, лежащая внѣ этого перпендикуляра, не равно удалена отъ тѣхъ же точекъ.*

1) Пусть точка O (фиг. 26) есть середина прямой DF, и прямая CO перпендикулярна къ DF. Возьмемъ какую нибудь точку C на этомъ перпендикулярѣ и соединимъ ее съ концами F и D прямой DF получимъ равныя наклонныя, ибо онѣ равно-удалены отъ основанія O перпендикуляра CO (§ 33, 1-е)

2) Возьмемъ точку F, внѣ перпендикуляра CD, проведеннаго черезъ середину C прямой AB и докажемъ что AF больше BF.



Фиг. 28

Соединивъ точку D, пересѣченіе AF съ перпендикуляромъ, съ концомъ B прямой AB, получимъ DB=DA (§ 57 1-е). Прямая BF короче ломанной BDF, т е

$$BF<BD+FD$$

или вставивъ вмѣсто BD равную ей AD, получимъ

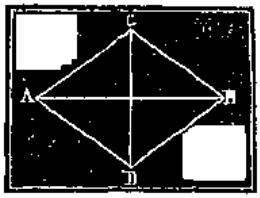
$$BF<AD+DF$$

$$\text{или } BF<AF$$

§ 58. *Слѣдствіе 1. Перпендикуляръ, проведенный чрезъ середину прямой, проходитъ чрезъ всѣ точки, равно-удаленныя отъ концовъ этой прямой.*

Дѣйствительно, всѣ точки этого перпендикуляра равно-отстоятъ отъ концовъ линіи, а всѣ точки, лежащія внѣ того же перпендикуляра, уже неравно отстоятъ отъ упомянутыхъ концовъ (§ 57). Поэтому говорятъ, что *перпендикуляръ, возставленный изъ середины прямой, есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, равно-отстоящихъ отъ концовъ ея.*

§ 59. *Слѣдствіе* II Пусть точки C и D равно отстоятъ отъ концовъ A и B прямой линіи AB т, е. полагаемъ, что AC=BC, AD=BD Легко понять, что прямая линія CD проведенная чрезъ точки C и D будетъ перпендикулярна къ AB и пройдетъ чрезъ середину этой послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ, если вообразимъ перпендикуляръ къ AB, проходящій чрезъ середину этой линіи, то онъ пройдетъ чрезъ всѣ точки равно-удаленныя отъ концовъ A и B (§ 58), а слѣд. пройдетъ и чрезъ точки C и D; такимъ образомъ этотъ воображаемый перпендикуляръ будетъ имѣть двѣ общія точки съ прямой CD слѣд онъ сольется съ CD; значитъ CD будетъ перпендикуляромъ къ AB и пройдетъ чрезъ середину этой лин'и



Фиг. 29.

Параллельныя линіи

5 Свойства параллельныхъ линій. Части параллельныхъ линій, лежащія между параллельными, равны между собою Разстояніе между параллельными линіями вездѣ одинаково Двѣ прямыя, соотвѣтственно параллельныя или перпендикулярныя двумъ другимъ встрѣчающимся прямымъ, пересѣкаются между собою, и составляютъ уголъ дополнительный или равный углу между линіями, которымъ онѣ параллельны или перпендикулярны.

Припомнимъ (§ 50) что *параллельными линіями называются такія прямыя линіи, которыя, находясь на одной плоскости, никогда не встрѣчаются, сколько бы ихъ ни продолжали*

Предложеніе

§ 60. *Двѣ линіи будутъ параллельны если отъ пересѣченія ихъ прямою.*

1) *сумма внутреннихъ угловъ по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;* или

2) *сумма внѣшнихъ угловъ по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;* или

3) *внутренніе противоположные углы равны;* или

4) *внѣшніе противоположные углы равны·* или

5) *соотвѣтственные углы равны.*

И дѣйствительно, на основаніи §§ 46 47, во всѣхъ этихъ случаяхъ прямыя не могутъ пересѣчься, сколько бы ихъ ни продолжали.

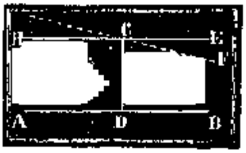
Предложенiе

§ 61. *Двѣ прямыя, перпендикулярныя къ третьей, параллельны между собою*· потому что, на основанiи § 48, такiя линiи на всемъ протяженiи ихъ не встрѣтятся.

Предложенiе.

§ 62. *Чрезъ всякую точку, взятую внѣ прямой, можно всегда провести къ ней параллельную линiю, притомъ только одну.*

1) Возьмемъ какую нибудь прямую AB и внѣ ея точку C; надобно объяснить, что чрезъ эту точку можно провести прямую параллельную къ AB. Изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на прямую AB, а къ линiи CD, изъ точки C, возставимъ перпендикуляръ HE: перпендикуляры HE и AB къ одной и той же прямой CD будутъ параллельны между собою (§ 61), т е HE параллельна AB.



Фиг. 30

2) Надобно объяснить что кромѣ прямой HE нельзя провесть другой линiи, чрезъ точку C, параллельно AB Чрезъ точку C проведемъ какую нибудь прямую CF, различную отъ CE; она будетъ *наклонною* къ CD, потому что чрезъ всякую точку возможенъ только одинъ перпендикуляръ. Примѣняя къ перпендикуляру BD и наклонной CF извѣстный постулатъ (§ 49), найдемъ, что CF пересѣчетъ AB Сказанное здѣсь о прямой CF примѣняется ко всякой прямой, проведенной чрезъ C, за исключенiемъ CE: всѣ онѣ пересѣкутъ прямую AB по ту или другую сторону перпендикуляра CD Этимъ и доказывается, что можно провести чрезъ точку только одну параллельную къ прямой

Предложенiе

§ 63. *Если двѣ линiи параллельны, то*

1) *сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;*

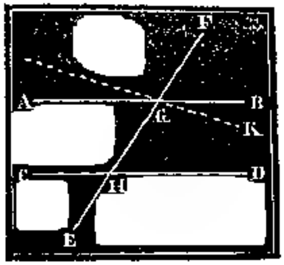
2) *сумма внѣшнихъ угловъ по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;*

3) *внутреннiе противоположные углы равны,*

4) *внѣшнiе противоположные углы равны*

5) *соотвѣтственные углы равны.*

Пусть AB параллельна CD EF—ихъ сѣкущая, надобно доказать что сумма внутреннихъ угловъ, BGH + DHG, равна двумъ прямымъ Допустимъ противное, что сумма ихъ неравна двумъ прямымъ; согласно этому предположенію построимъ уголъ KGH дополнительный углу DHG до двухъ прямыхъ; такъ какъ сумма DHG + KGH двухъ внутреннихъ угловъ по одну сторону сѣкущей равна двумъ прямымъ, то линія GK параллельна CD (§ 60); поэтому чрезъ точку G проведены двѣ прямыя AB и GK параллельно линіи CD, что невозможно (§ 62) Отсюда слѣдуетъ, что нельзя допустить, будто бы сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, не равна двумъ прямымъ значитъ сумма ихъ дѣйствительно равна двумъ прямымъ



Фиг 31

Доказавъ этотъ случай, объ остальныхъ заключимъ на основаніи предложенія изложеннаго въ § 41 по которому равенство двумъ прямымъ суммы двухъ внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей влечетъ за собою равенство внутреннихъ противоположныхъ угловъ внѣшнихъ противоположныхъ, равенство соотвѣтственныхъ угловъ и равенство двумъ прямымъ суммы двухъ внѣшнихъ угловъ по одну сторону сѣкущей

Предложеніе

§ 64. *Когда двѣ прямыя пересѣчены третьею и сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, неравна двумъ прямымъ, то эти линіи пересѣкутся* (фиг. 31).

Пусть GK и CD будутъ данныя прямыя, а EF ихъ сѣкущая, положимъ, что сумма угловъ DHG и KGH менѣе двухъ прямыхъ. Построивъ уголъ HGB дополнительный до двухъ прямыхъ углу DHG, получимъ прямую GB, параллельную CD (§ 60) и различную отъ GK; а какъ чрезъ точку G можно провесть только одну параллельную къ CD, то GK должна пересѣчь CD.

§ 65 Знаменитый греческій геометръ Эвклидъ, жившій въ III вѣкѣ до Р. Х., принялъ это предложеніе за аксіому (извѣстная 11-я аксіома, см переводъ Ѳ. Петрушевскаго Эвклидовыхъ началъ восемь книгъ).

Въ нашемъ руководствѣ, какъ и въ большей части сочиненій по геометріи, допускается безъ доказательства, что перпендикуляръ встрѣ чается съ наклонною; очевидно, что это послѣднее допущеніе есть частный случай 11-й аксіомы принятой Эвклидомъ

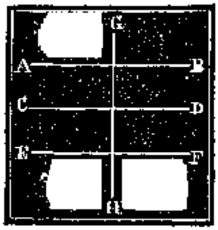
Предложеніе.

§ 66. *Прямая линія, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ, перпендикулярна и къ другой* (фиг. 23).

Пусть AB параллельна CD, и FG перпендикулярна къ AB; надобно доказать, что FG перпендикулярна къ CD. При параллельныхъ линіяхъ сумма внутреннихъ угловъ DGF и BFG равна двумъ прямымъ (§ 63), а какъ BFG прямой уголъ, то DGF также прямой и FG перпендикулярна къ CD

Предложеніе.

§ 67 *Двѣ прямыя, параллельныя порознь какой нибудь третьей линіи, параллельны между собою.*



Фиг 32

Пусть AB и CD параллельны прямой EF; надобно доказать, что AB параллельна къ CD. Проведемъ GH перпендикулярно къ EF: она будетъ перпендикулярна къ CD и AB (§ 66). Поэтому прямыя AB и CD, будучи перпендикулярны къ GH (§ 39), параллельны между собою(§ 61)

Предложеніе

§ 68. *Части параллельныхъ лежащія между параллельными, равны между собою* (фиг. 33).

Пусть AB параллельна CD, а AC параллельна BD надобно доказать, что AB=CD и AC=BD.

Проведемъ сѣкущую BC, которая при параллельныхъ линіяхъ AB и CD составятъ внутренніе противоположные равные углы ABC = BCD,

Фиг. 33

такіе же углу получатся при другихъ параллельныхъ AC и BD именно CBD=ACB. При такихъ условіяхъ, перемѣстимъ часть плоскости BCD такъ, чтобы точка B совпала съ C а точка C съ B тогда прямая CD пойдетъ по BA потому что уголъ BCD=ABC, а прямая BD пойдетъ по CA, ибо уголъ CBD=ACB; слѣдовательно точка D одновременно должна находиться на двухъ прямыхъ BA и CA, значитъ она должна совпасть съ точкою A Поэтому концы C и D прямой CD совпали съ концами B и A прямой AB, значитъ—прямая CD равна AB; концы B и D прямой BD совпали съ концами C и A прямой CA а потому BD=AC

Предложенiе

§ 69 *Разстоянiе между параллельными линiями вездѣ одинаково.*

Пусть AB параллельна CD Возьмемъ по произволу двѣ точки E и F на одной изъ параллельныхъ, напримѣръ на AB и проведемъ перпендикуляры EG и FH къ линiи AB; онѣ ж будутъ перпендикулярны и къ CD (§ 66), и слѣд параллельны между собою (§ 61). Части параллельныхъ EG и FH, лежащiя между параллельными AB и CD равны между собою (§ 68), слѣд. EG = FH а эти линiи выражаютъ разстоянiе между параллельными линiями AB и CD.

Фиг. 34

Предложенiе.

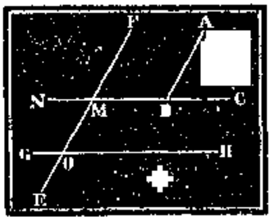
§ 70 *Двѣ прямыя, соотвѣтственно параллельныя двумъ встрѣчающимся прямымъ, пересѣкаются между собою и составляютъ уголъ дополнительный или равный углу между линiями, которымъ онѣ параллельны.*

1) Возьмемъ двѣ пересѣкающiяся прямыя AB и BC; пусть EF параллельна AB, и GH параллельна BC; докажемъ, что прямыя EF и GH пересѣкутся. Положимъ, что онѣ не пересѣкаются, слѣдовательно полагаемъ что онѣ параллельны между собою. Двѣ прямыя AB и GH, будучи параллельны EF, необходимо параллельны между собою (§ 67), т. е. AB параллельна GH но, по условiю BC также параллельна GH, слѣдовательно чрезъ точку B проведены двѣ прямыя BA и BC параллельно прямой GH, что невозможно (§ 62). И такъ предположенiе наше «будто бы EF и GH не встрѣчаются» невѣрно и слѣдовательно EF пересѣчетъ GH.

Фиг. 35

2) Пусть BA параллельна OF, и BC параллельна OH Надобно доказать, что, напримѣръ, (фиг. 36,) уголъ ABC=FOH и ABC+FOG=2D Продолжимъ BC и пусть M означаетъ пресѣченiе ея съ прямою OF.

При паралельныхъ линіяхъ AB и MF и сѣкущей NC имѣемъ равные



Фиг. 36

соотвѣтственные углы ABC=FMC; при другихъ паралельныхъ NC и GH и сѣкущей FE соотвѣтственные углы также равны, слѣд FMC=FOH; значитъ ABC=FOH. Разсматривая тѣже паралельныя и тѣ же сѣкущія, получимъ (§ 63).

$$ABC+FMN=2D$$

и

$$NMF=FOG,$$

и отсюда

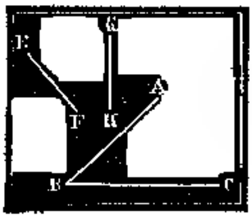
$$ABC+FOG=2D$$

Легко замѣтить, что тѣ углы равны, которыхъ бока направлены въ одну сторону, напримѣръ ABC и FOH, или въ стороны противныя напримѣръ ABC и GOE, а тѣ углы дополнительные, которыхъ одна пара паралельныхъ боковъ направлена въ одну сторону, а другая пара—въ противуположныя стороны· причемъ направленія линій принимаются отъ вершинъ угловъ

Предложеніе

§ 71. *Двѣ прямыя, соотвѣтственно перпендикулярныя двумъ встрѣчающимся прямымъ, пересѣкаются между собою и составляютъ уголъ дополнительный до двухъ прямыхъ или равный углу между линіями, которымъ онѣ перпендикулярны.*

1) Возьмемъ двѣ пересѣкающіяся прямыя AB и BC и положимъ что LF перпендикулярна къ AB, а GH перпендикулярна къ BC, на



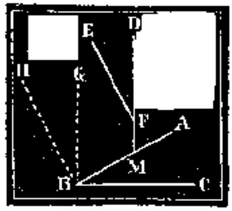
Фиг. 37.

добно доказать, что прямыя GH и EF должны пересѣчься. Положимъ, что онѣ не пересѣкаются, слѣдовательно полагаемъ что онѣ паралельны между собою. Прямая AB, по условію, перпендикулярна къ EF слѣдовательно она перпендикулярна и къ HG (§ 66) которая полагается паралельною EF; а какъ BC также перпендикулярна по условію, къ прямой GH, то чрезъ точку B проведены два перпендикуляра BA и BC къ прямой GH, что невозможно (§ 51). И такъ предположеніе наше, будто бы EF и GH не встрѣчаются, невѣрно и слѣдовательно EF пересѣчетъ GH.

2) Пусть DF перпендикулярна къ BC, а LF перпендикулярна къ

AB, надобно доказать что напримѣръ уголъ DFE = ABC, а EFM + ABC = 2D

Чрезъ вершину B проведемъ BG и BH соотвѣтственно перпендикулярно къ BC и BA эти перпендикуляры соотвѣтственно параллельны прямымъ FD и EF, именно BG параллельна прямой FD, а BH параллельна FE (§ 61). Поэтому на основаніи предъидущаго предложенія



Фиг 38

$$DFE = GBH \text{ и } EFM + GBH = 2D.$$

Но углы GBH и ABC равны между собою, потому что одинъ и тотъ же уголъ ABG служитъ дополненіемъ до прямаго каждому изъ нихъ; вставивъ въ предъидущія равенства вмѣсто угла GBH уголъ ABC, ему равный, получимъ

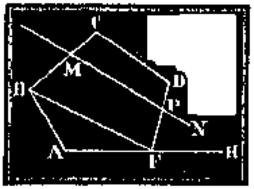
$$DFE = ABC$$
$$EFM + ABC = 2D$$

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ

Прямолинейныя фигуры.

6 Многоугольникъ, его периметръ стороны, углы, вершины, хорды, діагонали и внѣшніе углы. Полигоны выпуклые. — Сумма угловъ внѣшнихъ и внутреннихъ выпуклаго полигона. — Раздѣленіе полигоновъ по числу угловъ.

§ 72. *Многоугольникомъ* или *полигономъ* называется часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ прямыми линіями, составляющими ломанную линію. Эта ломанная называется *периметромъ* многоугольника. Всякая прямая, входящая въ составъ периметра, называется *стороною* или *бокомъ* многоугольника, напримѣръ AB BC, и т. д въ многоугольникѣ ABCDF.



Фиг. 39

Всякій уголъ, составленный двумя послѣдовательными сторонами многоугольника, называется *угломъ многоугольника*, напримѣръ уголъ ABC; а вершины этихъ угловъ—*вершинами многоугольника*, напримѣръ A, B,..

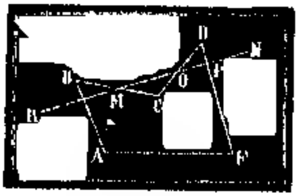
Хордою многоугольника называется прямая, соединяющая какія ни будь двѣ точки периметра, напримѣръ MP.

Діагональю называется прямая, соединяющая двѣ несмежныя вершины многоугольника, напр. BF.

Внѣшнимъ угломъ многоугольника называется уголъ, составленный одною изъ двухъ смежныхъ сторонъ и продолженіемъ другой, напримѣръ уголъ DFH.

Въ противоположность внѣшнимъ угламъ, *внутренними* углами называются углы многоугольника.

§ 73 *Выпуклымъ полигономъ* или выпуклымъ многоугольникомъ называется такой многоугольникъ, котораго периметръ пересѣкается прямою не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, напр. ABCDF (фиг. 39). Въ противномъ случаѣ многоугольникъ имѣетъ *входящіе углы*, напр. ABCDF, въ которомъ уголъ C входящій (фиг. 40).



Фиг 40

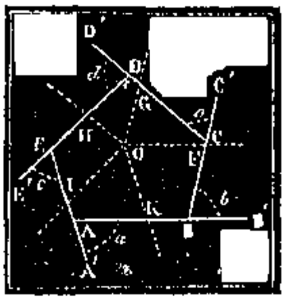
Въ настоящемъ курсѣ разсматриваются только выпуклые многоугольники

Предложенie.

§ 74. *Сумма внѣшнихъ угловъ, происшедшихъ отъ продолженія въ одну сторону всѣхъ боковъ многоугольника, равна четыремъ прямымъ угламъ.*

Возьмемъ какой нибудь многоугольникъ (выпуклой) ABCDE, продолжимъ его бока AB, BC, .. въ одномъ направленіи, назовемъ буквами a, b, c, d и e образовавшіеся углы, и докажемъ, что
$$a+b+c+d+e=4D,$$
буквою D, какъ всегда, означенъ прямой уголъ.

Чрезъ какую нибудь точку O проведемъ прямыя паралельно всѣмъ бокамъ многоугольника и въ одну сторону съ продолженіями этихъ боковъ, именно OF паралельно ABB', OG паралельно BCC' и т. д. такимъ образомъ получатся углы при точкѣ O, соотвѣтственно равные внѣшнимъ угламъ многоугольника именно $FOG=b$, $GOH=c$, и т д, наконецъ $FOK=a$, потому что стороны этихъ угловъ паралельны и одинаково направлены (§ 70). Но сумма всѣхъ этихъ угловъ, около точки O, равна четыремъ прямымъ (§ 35) слѣдовательно и сумма внѣшнихъ угловъ равна четыремъ прямымъ



Фиг. 41

Предложенie

§ 75. *Сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ угламъ, умноженнымъ на число сторонъ многоугольника безъ двухъ.*

Возьмемъ многоугольникъ ABCDE (фиг 41) произвольнаго числа сторонъ; для общности назовемъ буквою n число его сторонъ или вершинъ. Продоляшвъ всѣ бока въ одну сторону, получимъ при каждой вершинѣ смежные углы, которыхъ сумма, какъ извѣстно, равна двумъ прямымъ: а сумма смежныхъ угловъ при всѣхъ вершинахъ равна 2 мъ прямымъ, умноженнымъ на число вершинъ n, что составитъ $2Dn$, гдѣ D означаетъ прямой уголъ. Въ эту сумму войдутъ всѣ внутреннie углы и всѣ внѣшнie, сумма этихъ послѣднихъ равна 4D, слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ равна
$$2Dn-4D \text{ или } 2D(n-2)$$

§ 76 Многоугольники получаютъ различныя названія по числу ихъ сторонъ или, что то же, по числу ихъ угловъ.

Треугольникомъ называется многоугольникъ	о 3	сторонахъ
Четыреугольникомъ или четверосторонникомъ	» 4	»
Пятиугольникомъ или пятисторонникомъ	» 5	»
Шестиугольникомъ или шестисторонникомъ	» 6	» и т. д.

Примѣчаніе Очевидно, что двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи, образуя уголъ не ограничиваютъ плоскости; самое меньшее число линій, ограничивающихъ плоскость это три. Если бока какого нибудь угла пересѣчемъ прямою, то получимъ между ними опредѣленную плоскость, ограниченную тремя прямыми это *треугольникъ* Въ случаѣ параллельности двухъ прямыхъ, недостаточно третьей прямой для ограниченія плоскости между этими параллельными, а необходимы еще по крайней мѣрѣ двѣ линіи. Приступая къ изслѣдованію свойствъ многоугольниковъ, начнемъ съ треугольниковъ.

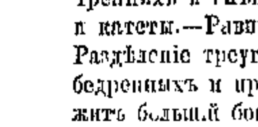
---

7 Треугольникъ: его основаніе и высота. – Сумма угловъ треугольника внутреннихъ и внѣшнихъ.—Раздѣленіе треугольника по угламъ. -Гипотенуза и катеты.—Равнымъ угламъ противулежатъ равные бока и на оборотъ.—Раздѣленіе треугольниковъ по сторонамъ; свойства треугольниковъ равнобедренныхъ и правильныхъ. — Большему углу въ треугольникѣ противулежитъ большій бокъ, и на оборотъ. — Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны соотвѣтственно равны, а углы между ними не равны, то большему углу противолежитъ и большая сторона

§ 77. Мы уже видѣли, что треугольникъ есть многоугольникъ о трехъ сторонахъ; слѣдовательно *треугольникомъ* называется часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ тремя пересѣкающимися прямыми

Во всякомъ треугольникѣ—три стороны и три угла, какъ тѣ, такъ и другіе называются частями треугольника слѣдовательно во всякомъ треугольникѣ *шесть частей*.

Каждую сторону треугольника, по произволу, можно принять за *основаніе*, а разстояніе ея до противуположной вершины называется *высотою* треугольника. Поэтому въ треугольникѣ ABC основаніе есть AC, а BD —высота, полагая, что BD перпендикулярна къ AC; если жъ принять BC за основаніе, то перпендикуляръ къ ней AF будетъ высота въ первомъ примѣрѣ вы-



Фиг. 42.

сота BD падаетъ внутри треугольника ABC, а во второмъ примѣрѣ высота AF падаетъ внѣ треугольника ABC.

Предложеніе.

§ 78. *Сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.*

Предложеніе это составляетъ частный случай предложенія опредѣляющаго сумму внутреннихъ угловъ всякаго многоугольника (§ 74). Дѣйствительно, число сторонъ треугольника равно 3, слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ, повторенпымъ три безъ двухъ (3—2) раза, или 1 разъ, и такъ получимъ два прямыхъ.

Примѣчаніе. Вотъ другое доказательство этого предложенія. Возьмемъ какой нибудь треугольникъ ABC. Продолжимъ сторону AB, и чрезъ точку B проведемъ прямую BF, параллельную боку AC. Въ слѣдствіе параллельности линій AC и BF, при сѣкущей AD, имѣемъ равные соотвѣтственные углы

$$A = DBF,$$

а при сѣкущей BC имѣемъ равные внутренние противоположные углы

$$C = CBF.$$

Фиг. 43

Сумма угловъ при точкѣ B, по одну сторону прямой AD, равна двумъ прямымъ угламъ, т. е.

$$ABC+CBF+DBF=2D,$$

Слѣдовательно $$ABC+C+A=2D.$$

Сумма внѣшнихъ угловъ треугольника, какъ и всякаго многоугольника, равна четыремъ прямымъ (§ 74).

§ 79. *Слѣдствіе 1.* Дополненіемъ до двухъ прямыхъ къ суммѣ угловъ A и C треугольника ABC (фиг. 43) служитъ третій уголъ ABC, который служитъ также дополненіемъ до двухъ прямыхъ и внѣшнему углу CBD (§ 29); слѣдовательно CBD=A+C (§ 32), т. е. *внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ съ нимъ несмежныхъ.*

§ 80. *Слѣдствіе 2. Если два угла треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другаго треугольника, то и третьи углы равны между собою:* потому что эти послѣдніе углы будутъ имѣть равныя дополненія до двухъ прямыхъ, именно суммы остальныхъ двухъ угловъ.

§ 81. *Слѣдствіе 3. Въ треугольникѣ только одинъ уголъ мо *жетъ быть прямымъ или тупымъ*

На основаніи этого свойства, треугольники по угламъ, дѣлятся на три рода

Треугольникъ называется *прямоугольнымъ треугольникомъ*, если въ немъ есть прямой уголъ. Причемъ бокъ, противулежащій прямому углу, называется *гипотенузою*, а остальные два бока — *катетами*. Такъ, если уголъ A прямой то BC гипотенуза, а, AC и AB катеты.

Фиг. 44.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма острыхъ угловъ равна прямому углу; потому что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

Треугольникъ называется *тупоугольнымъ треугольникомъ* если въ немъ есть тупой уголъ.

Въ *остроугольномъ* треугольникѣ всѣ углы острые.

Треугольникъ, въ которомъ нѣтъ прямаго угла, называется *косо угольнымъ*; слѣдовательно косоугольный треугольникъ можетъ быть тупоугольный и остроугольный.

Предложеніе.

§ 82 *Равнымъ угламъ треугольника противулежатъ равные бока*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ A=углу B докажемъ что AC=BC.

Раздѣлимъ уголъ C по-поламъ прямою CD; тогда въ треугольникахъ ACD и BCD, имѣющихъ по два равные угла именно A=B, ACD=BCD, третій уголъ ADC=CDB (§ 80). При такихъ условіяхъ, если согнемъ чертежъ на линіи CD, какъ на оси, тогда, по равенству угловъ при C прямая CB пойдетъ по CA, а по равенству прямыхъ угловъ, прямая DB пойдетъ по DA; поэтому точка B, будучи одновременно на двухъ прямыхъ AC и AD, совпадетъ съ пересѣченіемъ ихъ A, слѣд. AC=CB. Замѣтимъ, что CD перпендикулярна къ AB, ибо смежные углы ADC и CDB совмѣстились

Фиг. 45

Продолженіе

§ 83. Обратно, *равнымъ бокамъ треугольника противолежатъ равные углы* (фиг. 45).

Пусть въ треугольникѣ ABC бокъ AC=BC докажемъ, что уголъ B=уг. A

Раздѣлимъ уголъ C по поламъ и согнувъ чертежъ по линіи CD увидимъ, что CB пойдетъ по CA, а по равенству ихъ точка B совпадетъ съ A, а какъ точка D останется на мѣстѣ, то DB совмѣстится съ DA значитъ уголъ B совмѣстится съ угломъ A

§ 84. Треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны между собою называется *равнобедреннымъ*.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ сторона, неравная двумъ другимъ, чаще принимается за основаніе.

Въ слѣдствіе предъидущаго предложенія, *въ равнобедренномъ треугольникѣ, углы при основаніи равны между собою. Высота проходитъ чрезъ середину основанія и дѣлитъ пополамъ уголъ при вершинѣ*, что ясно изъ доказательства предложенія параграфа 82

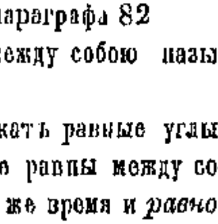
Треугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою называется *равностороннимъ*.

А какъ равнымъ бокамъ треугольника противулежатъ равные углы, то въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы также равны между собою. Поэтому, равносторонній треугольникъ есть въ то же время и *равноугольный*.

Равносторонній треугольникъ, по причинѣ и равенства его угловъ, называется также *правильнымъ треугольникомъ*.

Предложеніе.

§ 85 *Большему углу въ треугольникѣ противулежитъ большій бокъ*.



Фиг 46

Пусть уголъ CAB треугольника ABC больше угла C; докажемъ, что бокъ BC > AB. Въ большемъ углѣ нанесемъ меньшій при бокѣ AC; положимъ, что уголъ DAC=C. Въ треугольникѣ ACD противъ равныхъ угловъ C и A лежатъ равныя стороны AD=CD (§ 82). Прямая AB короче ломанной ADB, т. е.

$$AB < AD + BD;$$

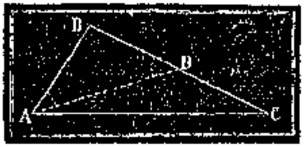
поставивъ, вмѣсто AD, ей, равную CD, получимъ

$$AB < CD + BD \text{ или } AB < BC$$

Предложеніе

§ 86 *Большему боку въ треугольникѣ противулежитъ большій уголъ.*

Пусть въ треугольникѣ ABC бокъ $BC > AB$, докажемъ, что уголъ $BAC > C$ На большемъ бокѣ, отъ вершины B, нанесемъ меньшій бокъ, пусть $BD = AB$, при чемъ точка D должна находиться между точками B и C; поэтому прямая AD будетъ лежать въ углѣ BAC значитъ уголъ $BAC > BAD$, а этотъ послѣдній равенъ углу ADB, ибо въ треугольникѣ ABD противъ равныхъ боковъ лежатъ равные углы (§ 83); притомъ уголъ ADB, какъ внѣшній для пересѣкающихся прямыхъ AC и AD, при сѣкущей BC, будетъ больше соотвѣтственнаго ему угла C (§ 44); слѣд. подавно уголъ $BAC > C$

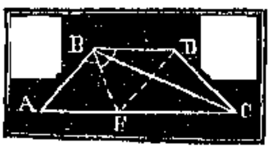


Фиг 17.

Предложеніе

§ 87 *Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны одного соотвѣтственно равны сторонамъ другаго треугольника, а углы между ними неравны то большему углу противулежитъ и большая сторона.*

Пусть въ треугольникахъ ABC и A'B'C' бокъ $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, а уголъ ABC больше угла A'B'C': докажемъ, что бокъ AC больше бока A'C'. Пристроимъ треугольникъ A'B'C' къ треугольнику ABC такъ, чтобы бокъ B'C' совмѣстился съ равнымъ ему бокомъ BC и пусть при этомъ вершина A' станетъ въ точкѣ D, значитъ бокъ $BD = A'B'$ и бокъ $CD = A'C'$, слѣдовательно надобно доказать, что CD меньше AC. Раздѣлимъ уголъ ABD на двѣ равныя части прямою BF; она пройдетъ въ углѣ ABC, потому что этотъ уголъ, по условію больше угла CBD, и слѣдовательно пересѣчетъ бокъ AC въ нѣкоторой точкѣ F, которую соединимъ съ точкою D. Согнувъ плоскость на линіи FB, какъ на оси найдемъ, что BA пойдетъ по BD, ибо уголъ $ABF = FBD$, и точка A



Фиг. 48

совпадетъ съ D, потому что $BA = BD$, значитъ двѣ точки A и F прямой AF совпали съ двумя точками D и F прямой DF, а потому $AF = DF$. Прямая CD короче ломанной CFD, т. е

$$CD < CF + DF,$$

вставивъ сюда вмѣсто DF, равную ей AF, получимъ

$$CD < CF + AF \text{ или } CD < AC,$$

потому что $CF + AF$ составляютъ прямую AC.

---

8. Равенство треугольниковъ; части, достаточныя для ихъ опредѣленія.— Два треугольника равноугольны, когда ихъ стороны взаимно и соотвѣтственно перпендикулярны или параллельны.

§ 88. *Сходственными углами* двухъ треугольниковъ называются углы, лежащіе противъ равныхъ сторонъ, одинъ въ одномъ треугольникѣ, другой въ другомъ; а *сходственными* боками называются стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ.

Фиг. 49.

Такъ, если бокъ $AB = A'B'$, то уголъ C сходственный съ C'. Если уголъ $A = A'$, то стороны BC и $B'C'$ будутъ сходственныя.

Предложеніе

§ 89. *Если двѣ стороны и заключающійся между ними уголъ въ одномъ треугольникѣ равны порознь двумъ сторонамъ и углу между ними въ другомъ треугольникѣ, то остальныя сходственныя части равны между собою и треугольники также равны* (фиг. 49).

Пусть $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и уголъ $B = B'$; докажемъ: 1) что $AC = A'C'$, уголъ $A = A'$ и $C = C'$. Наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы вершина A' совпадала съ A и бокъ $A'B'$ пошелъ бы по AB, по равенству этихъ боковъ, точка B' совпадетъ съ B. По равенству угловъ B' и B бокъ $B'C'$ пойдетъ по BC а какъ бока эти равны, то точка C' совпадетъ съ C. Бокъ $A'C'$ совпадетъ съ AC, потому что концы его A' и C' совпадали съ концами A и C бока AC; и такъ $AC = A'C'$. Углы $A = A'$ и $C = C'$, потому что ихъ вершины и бока совмѣстились.

2) Вершины треугольника $A'B'C'$ совмѣстились съ вершинами треугольника ABC самые бока также совмѣстилися слѣдовательно треугольникъ $A'C'B'$ равенъ треугольнику ABC.

Предложеніе

§ 90. *Если сторона и прилежащіе къ ней два угла одного треугольника равны, порознь, сторонѣ и прилежащимъ къ ней угламъ въ другомъ треугольникѣ, то остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны.*

Пусть $AC=A'C'$, уголъ $A=A'$ и уголъ $C=C'$, докажемъ: 1) что $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ и уголъ $B=B'$ Наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы вершины A' и C' совмѣстились, первая съ A, а вторая съ C, это возможно по равенству сторонъ AC и $A'C'$. По равенству угловъ A и A' сторона $A'B'$ пойдетъ по AB, а по равенству угловъ C и C', сторона $C'B'$ пойдетъ по CB. Поэтому точка B' должна одновременно лежать на двухъ сторонахъ, AB и CB, слѣдовательно она упадетъ въ точку ихъ пересѣченія B. И такъ $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, потому что концы этихъ линій совмѣстились а также уголъ $B=B'$, потому что вершины ихъ и бока совмѣстились. Впрочемъ, равенство угловъ B и B' слѣдуетъ непосредственно, безъ наложенія, изъ замѣчанія сдѣланнаго въ § 80

Фиг. 49

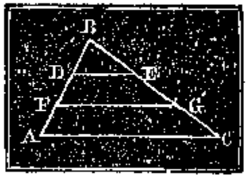
2) Треугольники также равны, потому что ихъ вершины и бока совмѣщены.

Предложеніе.

§ 91. *Если три стороны одного треугольника равны, порознь, сторонамъ другаго треугольника, то и сходственные углы равны между собою и треугольники равны* (фиг. 49).

Пусть $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ и $AC=A'C'$, докажемъ, что уголъ $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$. Еслибъ допустить, что уголъ A неравенъ углу A', то на основаніи предложенія, изложеннаго § 87, заключили бы, что и бокъ BC неравенъ боку $B'C'$, а это противно условію, слѣдовательно уголъ $A=A'$; также докажется и равенство угловъ B и B', C и C' Впрочемъ, доказавъ равенство угловъ A и A' убѣждаемся въ равенствѣ остальныхъ угловъ и самыхъ треугольниковъ на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 89.

§ 92 Обратное предъидущему предложенію вообще невѣрно, т. е. если углы одного треугольника равны угламъ другаго треугольника, то изъ этого не слѣдуетъ заключать о равенствѣ сторонъ треугольниковъ. И дѣйствительно, проведя хорды DE и FG въ треугольникѣ ABC параллельно боку AC, получимъ треугольники BDE и BFG, въ которыхъ углы равны угламъ треугольника ABC, какъ соотвѣтственные при паралельныхъ линіяхъ AC DE, и FG и сѣкущей AB, съ одной стороны и BC съ другой, а уголъ B — общій всѣмъ треугольникамъ. Между тѣмъ очевидно, что сходственныя стороны и самые треугольники неравны.

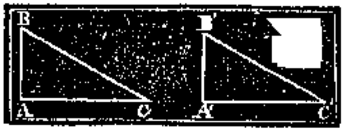


Фиг 50

Предложеніе

§ 93 *Если ипотинуза и острый уголъ одного прямоугольнаго треугольника равны, порознь, ипотинузѣ и острому углу другаго треугольника, то и остальныя сходственныя части равны между собою и треугольники равны.*

Пусть въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и A'B'C' углы A. A' прямые и положимъ, что ипотенуза BC=B'C', и острый уголъ B=B'. Въ слѣдствіе этого условія и третіе углы равны, т. е. C=C' (§ 80); слѣдовательно находимся въ условіяхъ предложенія параграфа 90; значитъ вершины и бока треугольников въ совмѣстятся, слѣд. AB=A'B' AC=A'C' и треугольники равны между собою



Фиг 51

Предложеніе

§ 94. *Если ипотенуза и катетъ одного треугольника равны, порознь, ипотенузѣ и катету другаго треугольника, то остальныя сходственныя части равны между собою и треугольники равны* (51 фиг.)

Пусть ипотенуза BC=B'C' и катетъ AB=A'B'. Наложимъ треугольникъ A'B'C' на ABC такъ, чтобы точка A' совпадала съ A, и B' — съ B. Сторона A'C' пойдетъ по AC по равенству прямыхъ угловъ A и A' слѣдовательно точка C' будетъ находиться на линіи AC; такимъ образомъ изъ точки B, по одну сторону перпендикуляра AB

2) Вершины треугольника A'B'C' совмѣстились съ вершинами треугольника ABC, самые бока также совмѣстились слѣдовательно треугольникъ A'C'B' равенъ треугольнику ABC

Предложеніе

§ 90. *Если сторона и прилежащіе къ ней два угла одного треугольника равны, порознь, сторонѣ и прилежащимъ къ ней угламъ въ другомъ треугольникѣ, то остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны.*

Пусть AC=A'C', уголъ A=A' и уголъ C=C', докажемъ: 1) что AB=A'B', BC=B'C' и уголъ B=B' Наложимъ треугольникъ A'B'C' на ABC такъ чтобы вершины A' и C' совмѣстились, первая съ A, а вторая съ C; это возможно по равенству сторонъ AC и A'C'. По равенству угловъ A и A', сторона A'B' пойдетъ по AB, а по равенству угловъ C и C', сторона C'B' пойдетъ по CB Поэтому точка B' должна одновременно лежать на двухъ сторонахъ AB и CB, слѣдовательно она упадетъ въ точку ихъ пересѣченія B И такъ AB=A'B', BC=B'C', потому что концы этихъ линій совмѣстились; а также уголъ B=B', потому что вершины ихъ и бока совмѣстились. Впрочемъ, равенство угловъ B и B слѣдуетъ непосредственно, безъ наложенія, изъ замѣчанія сдѣланнаго въ § 80.

Фиг. 49

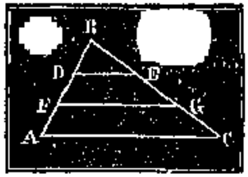
2) Треугольники также равны потому что ихъ вершины и бока совмѣщены

Предложеніе

§ 91. *Если три стороны одного треугольника равны, порознь, сторонамъ другого треугольника, то и сходственные углы равны между собою и треугольники равны* (фиг. 49).

Пусть AB=A'B'. BC=B'C и AC=A'C'; докажемъ, что уголъ A=A', B=B', C=C'. Еслибъ допустить, что уголъ A неравенъ углу A', то на основаніи предложенія, изложеннаго § 87, заключили бы, что и бокъ BC неравенъ боку B'C', а это противно условію, слѣдовательно уголъ A=A'; также докажется и равенство угловъ B и B', C и C Впрочемъ, доказавъ равенство угловъ A и A', убѣждаемся въ равенствѣ остальныхъ угловъ и самыхъ треугольниковъ на основанiи предложенія, изложеннаго въ § 89.

§ 92. Обратное предъидущему предложенію вообще невѣрно, т. е если углы одного треугольника равны угламъ другаго треугольника, то изъ этого не слѣдуетъ заключать о равенствѣ сторонъ треугольниковъ И дѣйствительно, проведя хорды DE и FG въ треугольникѣ ABC паралельно боку AC, получимъ треугольники BDE и BFG въ которыхъ углы равны угламъ треугольника ABC, какъ соотвѣтственные при паралейльныхъ линіяхъ AC DE, и FG и сѣкущей AB, съ одной стороны, и BC съ другой, а уголъ B—общій всѣмъ треугольникамъ. Между тѣмъ, очевидно, что сходственныя стороны и самые треугольники неравны

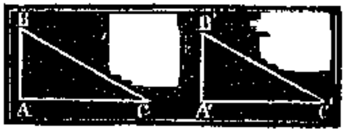


Фиг 50

Предложеніе.

§ 93 *Если ипотинуза и острый уголъ одного прямоугольнаго треугольника равны, порознь, ипотинузѣ и острому углу другаго треугольника, то и остальныя сходственныя части равны между собою и треугольники равны.*

Пусть въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABC и A'B'C углы A A прямые и положимъ, что ипотенуза BC=B'C', и острый уголъ B=B'. Въ слѣдствіе этого условія и третіе углы равны, т. е. C=C (§ 80); слѣдовательно находимся въ условіяхъ предложенія параграфа 90; значитъ вершины и бока треугольнико въ совмѣстятся, слѣд AB=A B', AC=A'C и треугольники равны между собою.



Фиг. 51.

Предложеніе

§ 94. *Если ипотенуза и катетъ одного треугольника равны, порознь, ипотенузѣ и катету другаго треугольника, то остальныя сходственныя части равны между собою и треугольники равны* (51фиг)

Пусть ипотенуза BC=B'C' и катетъ AB=A'B'. Наложимъ треугольникъ A'B C' на ABC такъ, чтобы точка A' совпадала съ A, и B'—съ B Сторона A C' пойдетъ по AC по равенству прямыхъ угловъ A и A, слѣдовательно точка C' будетъ находиться на линіи AC; такимъ образомъ изъ точки B, по одну сторону перпендикуляра AB, должны пройти двѣ равны наклонны, ясно, что онѣ должны совмѣститься (§ 53). Значитъ и остальныя части совмѣстятся, слѣд. уголъ $B=B'$, $C=C'$ и катетъ $AC=A'C'$, притомъ и треугольники равны между собою.

§ 95. *Примѣчаніе.* Мы видѣли, что треугольники равны если въ нихъ соотвѣтственно равны:

1) двѣ стороны и между ними уголъ,

2) сторона и два прилежащіе къ ней угла,

3) три стороны

4) гипотенуза и острый уголъ

5) гипотенуза и катетъ.

Слѣдовательно, каждыя изъ упомянутыхъ частей опредѣляютъ треугольникъ. Напримѣръ, треугольникъ вполнѣ опредѣленъ, если даны по величинѣ, двѣ стороны и уголъ между ними; потому что всѣ треугольники, построенные съ соблюденіемъ этого условія, будутъ во всѣхъ частяхъ равны и слѣдовательно составятъ одинъ и тотъ же треугольникъ.

Предложеніе

§ 96. *Если стороны одного треугольникамъ параллельны сторона другаго треугольника то углы этихъ треугольниковъ соотвѣтственно равны.*

Мы уже видѣли что два угла, которыхъ бока параллельны, равны между собою или взаимно дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ (§ 70)

1) Положимъ, что всѣ углы одного треугольника дополняютъ углы другаго треугольника; тогда сумма всѣхъ шести угловъ въ обоихъ треугольникахъ составляетъ 6 прямыхъ, а это невозможно, потому что сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, а въ двухъ треугольникахъ—четыремъ прямымъ.

2) Положимъ, что два угла одного треугольника служатъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ двумъ угламъ въ другомъ треугольникѣ, а третьи углы равны между собою: сумма первыхъ четырехъ угловъ составитъ четыре прямые, слѣдовательно сумма всѣхъ шести угловъ будетъ больше четырехъ прямыхъ, что невозможно.

3) Нельзя положить, что одинъ уголъ служитъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ углу въ другомъ треугольникѣ, а два остальные угла

въ обоихъ треугольникахъ равны между собою, потому что равенство этихъ послѣднихъ влечетъ равенство и первыхъ. Въ одномъ только случаѣ одинъ уголъ можетъ служить дополненіемъ до двухъ прямыхъ другому углу, когда эти углы прямые, но все-таки они равны между собою. И такъ углы одного треугольника равны угламъ другаго треугольника

Предложеніе.

§ 97. *Если стороны одного треугольника перпендикулярны сторонамъ другаго треугольника, то углы этихъ треугольниковъ соотвѣтственно равны*

Извѣстно, что два угла, которыхъ стороны взаимно перпендикулярны равны между собою или служатъ другъ другу дополненіемъ до двухъ прямыхъ; на этомъ основаніи объясненіе будетъ тоже, что и въ предъидущемъ предложеніи.

Примѣчаніе. Въ случаѣ перпендикулярности или параллельности сторонъ въ двухъ треугольникахъ, для отыскания равныхъ угловъ, надобно смотрѣть какіе бока треугольника перпендикулярны или параллельны бокамъ въ другомъ треугольникѣ (§§ 71 и 70).

Предложеніе.

§ 98. *Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны соотвѣтственно равны, а третьи стороны неравны, то большей сторонѣ противулежитъ большій уголъ* (фиг. 48).

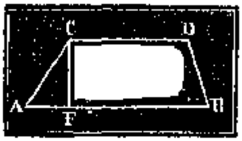
Положимъ, что въ двухъ треугольникахъ ABC и A'B'C', AB=A'B' BC=B'C' и AC>A'C'; надобно доказать, что уголъ ABC>B'. Нельзя допустить, что уголъ ABC=B', потому что тогда будемъ имѣть условія предложенія, изложеннаго въ § 89, вслѣдствіе котораго стороны, лежащія противъ этихъ угловъ, т. е. AC и A'C' были бы равныя, что противно условію. Нельзя также положить, что уголъ ABC<B', потому что тогда, на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 87, надо допустить, что сторона, лежащая противъ угла ABC, меньше стороны противулежащей углу B', т. е. AC<A'C' и это противно условію. И такъ, уголъ ABC не можетъ быть ни равенъ углу, ни меньше его, слѣдовательно уголъ ABC больше угла B'

9 Четыреугольники. — Трапеція, ея основанія и высота. — Свойства хорды трапеціи, проведенной параллельно основаніямъ чрезъ середину одного изъ боковъ. Параллелограммъ; равенство противулежащихъ угловъ въ параллелограммѣ; свойства его діагоналей — Равенство параллелограммовъ. — Ромбъ или лозанжъ и прямоугольникъ. — Свойства ихъ діогоналей. Равенство прямоугольниковъ. — Квадратъ

§ 99 Извѣстно (§ 76), что четыреугольникомъ называется часть плоскости, ограниченная четырьмя прямыми взаимно пересѣкающимися; или четыреугольникъ есть многоугольникъ о четырехъ бокахъ.

Сумма внутреннихъ угловъ четыреугольника равна четыремъ прямымъ; потому что 4 стороны безъ двухъ составляютъ 2, слѣдовательно, для полученія суммы внутреннихъ угловъ, надобно два прямые повторить 2 раза (§ 73), получимъ четыре прямые

§ 100. *Трапеція есть четвероугольникъ, въ которомъ двѣ стороны параллельны а остальныя двѣ непараллельны.*



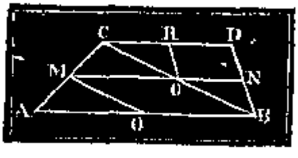
Фиг. 52

Такъ, если AB параллельна CD, а AC непараллельна BD, то четвероугольникъ ABCD —трапеція. *Основаніями трапеціи называются два параллельные его бока,* AB и CD *а высотою— разстояніе между основаніями:* такъ, если CF перпендикулярна къ AB то CF —высота трапеціи

Предложеніе

§ 101 *Хорда трапеціи, проведенная параллельно ея основаніямъ чрезъ середину одного бока, раздѣляетъ діагональ и другой бокъ пополамъ и равна полусуммѣ основаній.*

Пусть ABDC—трапеція, въ которой AB параллельна CD, BC— ея діагональ. Чрезъ середину M бока AC проведемъ хорду MN параллельно основаніямъ AB и CD. Докажемъ,



Фиг. 53

1) что CO=BO.

Чрезъ точку M проведемъ MQ параллельно діагонали CB. Въ треугольникахъ CMO и AMQ находятся три соотвѣтственно равныя части: MC=MA, уголъ MCO=AMQ и уголъ CMO=MAQ (§§ 63, 5-е); слѣдовательно и остальныя соотвѣтственныя части равны (§ 90), т. е

$$CO=MQ;$$

части параллельныхъ MQ и BO, заключающіяся между параллельными MO и BQ, равны между собою (§ 68), слѣдовательно

$$MQ=BO.$$

Сравнивая послѣднія два равенства получимъ

$$CO=BO.$$

Изъ равенства упомянутыхъ треугольниковъ имѣемъ также

$$MO=AQ \text{ но } MO=BQ$$

слѣдовательно $AQ=BQ$ и $MO=\frac{1}{2}AB$.

2) Надобно доказать что $BN=DN$. Проведемъ OR параллельно боку BD.

Въ треугольникахъ BNO и CRO есть три равныя части. $BO=CO$, что было сейчасъ доказано, и углы равны (§ 63); слѣдовательно и остальныя сходственныя стороны равны, т. е.

$$BN=OR; \text{ но } OR=DN \text{ (§ 68)};$$

слѣдовательно $BN=DN$.

Изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ слѣдуетъ что

$$ON=CR; \text{ но } ON=DR \text{ (§ 68)},$$

слѣдовательно $CR=DR$ и $ON=\frac{1}{2}CD$.

3) Надобно доказать что $MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$. Мы уже замѣтили, что

$$MO=\tfrac{1}{2}AB,$$
$$ON=\tfrac{1}{2}CD,$$

складывая эти равенства, найдемъ

$$MO+ON=\tfrac{1}{2}(AB+CD)$$

или

$$MN=\tfrac{1}{2}(AB+CD).$$

§ 102. *Слѣдствіе. Прямая, соединяющая середины непараллельныхъ боковъ трапеціи, параллельна ея основаніямъ.*

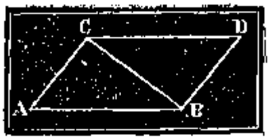
Дѣйствительно, на основаніи предъидущаго предложенія, прямая линія, проведенная чрезъ середину одного изъ двухъ непараллельныхъ боковъ, параллельно къ основаніямъ трапеціи, должна пройти чрезъ середину другаго бока, слѣд. она совмѣстится съ прямою, соединяющею упомянутые середины, ибо положеніе прямой опредѣляется двумя точками.

§ 103. *Параллелограммомъ называется четвероугольникъ, въ которомъ противолежащіе бока параллельны по-парно.* Какія нибудь двѣ параллельныя стороны параллелограмма называются *основаніями*, а разстояніе между ними—*высотою* параллелограмма.

Предложеніе

§ 104. *Въ параллелограммѣ противоположные бока, а также противоположные углы равны между собою.*

Пусть ABDC параллелограммъ, значитъ AB параллельна CD, а AC параллельна BD. Извѣстно, что части параллельныхъ, заключающіяся между параллельными, равны между собою; слѣдовательно AB = CD, AC = BD.



Фиг. 54.

Углы A и D равны между собою, потому что бока ихъ параллельны и оба направлены въ стороны противоположныя. Тоже скажемъ и объ углахъ B и C.

§ 105. *Слѣдствіе. Параллелограммъ діагональю дѣлится пополамъ.* По равенству сторонъ: AB = CD, AC = BD и общей BC треугольникамъ ABC и BCD, самые треугольники равны (§ 91).

Предложеніе

§ 106. *Четыреугольникъ будетъ параллелограммъ, если двѣ противоположныя стороны его равны и параллельны* (фиг. 54).

Пусть AB равна и параллельна CD; докажемъ, что AC параллельна BD. Проведя діагональ CB, получимъ треугольникъ ABC равный треугольнику CBD, ибо уголъ ABC = углу BCD (§ 63, 3-е), AB = CD и CB — общая; слѣд. уголъ CBD = углу ACB (§ 89), а потому AC параллельна BD (§ 60, и 3). И такъ четыреугольникъ ABDC параллелограммъ (§ 103), потому что стороны его AB и CD, AC и BD попарно параллельны.

Предложеніе

§ 107. *Четыреугольникъ будетъ параллелограммъ, если противолежащіе его бока по-парно равны* (фиг. 54).

Пусть въ четыреугольникѣ ABDC AB = CD, AC = BD, надобно доказать, что AB и AC соотвѣтственно параллельны бокамъ CD и BD.

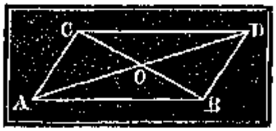
Проведя діагональ BC, получимъ два треугольника, ABC и BCD, которыхъ стороны по-парно равны. AB = CD, AC = BD, по условію, и

BC — общая обоимъ треугольникамъ. Слѣдовательно противъ равныхъ сторонъ AB и CD лежатъ равные углы ACB и CBD, а также противъ AC и BD лежатъ равные углы ABC и BCD (§ 94). По равенству первыхъ угловъ заключаемъ о параллельности боковъ AC и BD (§ 60 3), по равенству угловъ ABC и BCD о параллельности другихъ двухъ боковъ AB и CD (§ 60, 3), слѣдовательно ABDC—параллелограммъ (§ 103)

Предложеніе.

108. *Діагонали параллелограмма взаимно дѣлятся по поламъ*

Пусть ABDC—параллелограммъ: проведемъ діагонали AD и BC, и докажемъ, что AO=OD, CO=OB.



Фиг. 55.

Въ треугольникахъ ABO и CDO стороны AB и CD равны (§ 104), и углы при нихъ равны: BAO=CDO, ABO=DCO, какъ внутренніе противуположные при параллельныхъ линіяхъ и сѣкущихъ AD и BC; слѣдовательно и остальныя сходственныя части равны (§ 90), именно BO=CO и AO=DO

Предложеніе.

§ 109. *Если двѣ стороны и уголъ между ними одного параллелограмма равны, порознь, двумъ сторонамъ и углу между ними въ другомъ параллелограммѣ, то остальныя части равны между собою и также параллелограммы равны.*

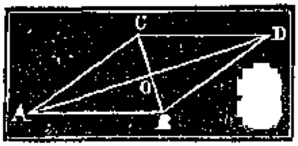
Пусть въ параллелограммахъ ABDC и A'B'D'C', AB=A'B' AC=A'C' и уголъ A=A'.

Сперва докажемъ равенство угловъ. Уголъ C дополняетъ уголъ A до двухъ прямыхъ (§ 63, 1-е), по той же причинѣ C' служитъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ угла A' но углы A и A' по условію равны между собою, слѣд. C=C' (§ 32); также докажемъ равенство угловъ B=B', D=D'.

Фиг. 56

Наложимъ параллелограммъ A'B'D'C' на ABDC такъ, чтобы концы бока A'B' совпали съ A и B,—причемъ бокъ A'C' пойдетъ по AC ибо уголъ A=A, и точка C' упадетъ въ C, потому что

A C′=AC Бокъ CD′ пойдетъ по CD, по равенству угловъ C и C′; по той же причинѣ B D′ пойдетъ по BD ибо уголъ B′=B. Значитъ, точка D′, будучи одновременно на двухъ прямыхъ CD и BD, необходимо совпадетъ съ ихъ пересѣченіемъ D. И такъ CD = C D′, BD B′D′ и параллелограммъ A′C′D′B′ совмѣстится съ параллелограммомъ ABDC



Фиг 57

§ 110, Возьмемъ параллелограммъ, въ которомъ двѣ смежныя стороны, AB и AC, равны между собою; тогда другія двѣ стороны CD и BD, будучи соотвѣтственно равны первымъ (§ 104), равны и между собою.

Такимъ образомъ получится четвероугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою; такой четвероугольникъ называется ромбомъ (лозанжъ). И такъ *ромбъ есть четвероугольникъ, въ которомъ, всѣ стороны равны между собою.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что ромбъ есть параллелограммъ, ибо противуположныя его стороны параллельны (§ 107).

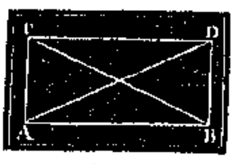
§ 111. Въ слѣдствіе опредѣленія ромба онъ есть параллелограммъ (§ 107); значитъ *діагонали ромба взаимно дѣлятся по-поламъ* (§ 108). Къ этому присоединяется еще слѣдующее свойство ромба

Предложеніе.

§ 112 *Діагонали ромба взаимно перпендикулярны* (фиг 57).

Пусть ABDC—ромбъ; надобно доказать, что діагонали AD и BC взаимно перпендикулярны. Въ треугольникахъ ACO и CDO стороны порознь равны: AC=CD, какъ стороны ромба, AO=DO, потому что діагонали параллелограмма дѣлятся по-поламъ, CO — общая; поэтому противъ равныхъ сторонъ AC и CD лежатъ равные углы AOC и DOC (§ 91) слѣдовательно CO перпендикулярна къ AD (§ 24) и діагонали AD и BC взаимно перпендикулярны (§ 39).

§ 113 Если въ параллелограммѣ одинъ уголъ, напримѣръ BAC прямой, то и противуположный ему уголъ BDC также прямой (§ 104); уголъ ACD также прямой потому что прямая AC, будучи перпендикулярна къ AB, перпендикулярна и къ параллельной ей CD (§ 66); по этой же причинѣ и уголъ ABD прямой И такъ въ параллелограммѣ ABDC



Фиг 58

всѣ углы прямые, если только одинъ его уголъ прямой такой параллелограммъ называется *прямоугольникомъ*.

Поэтому *прямоугольникъ есть такой четвероугольникъ, въ которомъ всѣ углы прямые.* Отсюда слѣдуетъ, *что прямоугольникъ есть параллелограммъ, ибо противуположныя его стороны параллельны.*

§ 114. Такъ какъ прямоугольникъ есть параллелограммъ, то *діагонали прямоугольника взаимно дѣлятся по-поламъ* (§ 108). Къ этому присовокупляется еще слѣдующее свойство·

Предложеніе

§ 115· *Діагонали прямоугольника равны между собою* (фиг. 58)

Пусть ABDC —прямоугольникъ, докажемъ, что діагональ AD=BC Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ACD и ACB, между равными сторонами (CD=AB, AC — общая) заключаются равные прямые углы ACD=CAB, слѣдовательно остальныя сходственныя части равны (§ 89) т. е. AD=CB·

Предложеніе

§116. *Прямоугольники равны между собою, если два смежные бока одного изъ нихъ равны, порознь, двумъ смежнымъ бокамъ другаго прямоугольника*

Въ самомъ дѣлѣ, углы между этими боками какъ прямые, также равны, слѣдовательно на основаніи предложенія о равенствѣ параллелограммовъ (§ 109), заключаемъ о равенствѣ прямоугольниковъ.

§ 117. Въ прямоугольникѣ одна изъ сторонъ называется *основаніемъ*, а другая, къ ней перпендикулярная, *высотою;* поэтому *два прямоугольника равны между собою, если у нихъ основанія и высоты, порознь, равны.*

§ 118. Когда въ прямоугольникѣ двѣ смежныя стороны AB и AC равны между собою, то и двѣ другія, CD и BD, соотвѣтственно равныя первымъ, и между собою равны (§ 104): такой четвероугольникъ называется *квадратомъ*.

Фиг. 59

И такъ *квадратъ есть такой четвероугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою а углы прямые.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что квадратъ есть прямоугольникъ, ибо всѣ углы его прямые (§ 113), а слѣд. квадратъ есть также и параллелограммъ, ибо прямоугольникъ есть параллелограммъ.

§ 119 *Діагонали квадрата взаимно дѣлятся по-поламъ* (§ 108), *онѣ взаимно перпендикулярны* (§ 112) *и равны между собою* (§ 115)

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ

Круговая линія

10 Кругъ, центръ, радіусъ и касательная. — Діаметръ; онъ раздѣляетъ по-поламъ какъ окружность, такъ и кругъ, и есть наибольшая изъ хордъ. — Сегментъ, центральный уголъ, секторъ, уголъ вписанный въ кругѣ или круговомъ сегментѣ. — Многоугольники вписанный и описанный. Окружности въ полигонѣ вписанныя и около него описанныя. — Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, дѣлитъ по поламъ какъ хорду, такъ и соотвѣтствующій ей центральный уголъ. — Три точки, нележащія на одной прямой, опредѣляютъ окружность.

§ 120. *Окружность* или *круговая линія есть такая кривая которой всѣ точки равно удалены отъ одной точки.* Эта точка называется *центромъ.*

Фиг. 60

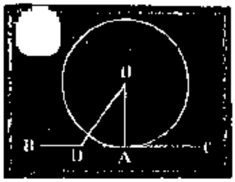
Часть плоскости, ограниченная окружностію называется *кругомъ.*

Радіусомъ называется прямая, соединяющая центръ съ какою нибудь точкою окружности; напримѣръ AO есть радіусъ окружности, которой центръ въ O. Ясно что *всѣ радіусы окружности равны между собою.*

Предложеніе

§ 121. *Если чрезъ какую нибудь точку окружности провести радіусъ и перпендикуляръ къ нему, то этотъ послѣдній имѣетъ одну только общую точку съ окружностью.*

Пусть АО—радіусъ, ВС — перпендикуляръ къ нему въ точкѣ А, докажемъ, что прямая ВС и окружность имѣютъ только одну общую точку А. На прямой ВС возьмемъ какую нибудь точку D и соединимъ ее съ центромъ прямою DO Такъ какъ ОА перпендикулярна къ ВС, то OD будетъ наклонною и слѣдовательно больше радіуса ОА отсюда слѣдуетъ, что D лежитъ внѣ круга. Все сказанное о точкѣ D примѣняется ко всѣмъ точкамъ прямой ВС, кромѣ А, потому что D есть произвольная точка этой линіи. И такъ, всѣ точки прямой ВС, за исключеніемъ А, лежатъ внѣ круга; слѣдовательно прямая ВС имѣетъ одну только общую точку А съ окружностью.



Фиг. 61

§ 122. *Касательною къ окружности называется прямая имѣющая одну только общую точку съ окружностью.*

Точкою касанія называется общая точка окружности и касательной.

Поэтому предложеніе предъидущаго параграфа можно такъ выразить: *Если чрезъ какую нибудь точку окружности провести радіусъ и перпендикуляръ къ нему то этотъ послѣдній будетъ касательною.*

Предложеніе.

§ 123. *Прямая, соединяющая центръ окружности съ точкою касанія, перпендикулярна къ касательной* (фиг. 61).

Пусть ВС касательная къ окружности въ точкѣ А, надобно доказать, что ОА, соединяющая точку касанія А съ центромъ, перпендикулярна къ касательной ВС. Всѣ точки касательной, за исключеніемъ А, лежатъ внѣ круга (§ 122) слѣдовательно разстояніе каждой изъ нихъ, напримѣръ D, до центра O, будетъ больше радіуса ОА; поэтому ОА есть кратчайшее разстояніе отъ O до прямой ВС, а потому ОА перпендикулярна къ ВС (§ 56)

Предложеніе

§ 124. *Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, проходитъ чрезъ точку касанія.*

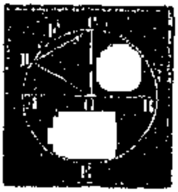
Дѣйствительно, еслибъ этотъ перпендикуляръ не прошелъ чрезъ точку касанія, то, соединивъ точку касанія съ центромъ, получили бы дру гой перпендикуляръ (§ 123) опущенный изъ центра на касательную что невозможно

Предложенiе

§ 12. *Перпендикуляръ, возставленный изъ точки касанiя къ касательной, проходитъ чрезъ центръ* (фиг. 61).

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ этотъ перпендикуляръ оставилъ центръ въ сторонѣ, то, соединивъ центръ съ точкою касанiя, имѣли бы два перпендикуляра (§ 123), возставленные изъ точки касанiя къ касательной что невозможно.

§ 126. *Дiаметромъ называется прямая, которая проходитъ чрезъ центръ и оканчивается на окружности,* напримѣръ AB Поэтому дiаметръ состоитъ изъ двухъ радiусовъ, а слѣдовательно *въ кругѣ всѣ дiаметры равны между собою.*



Фиг 62

§ 127. *Дугою* называется часть окружности, напр DFC на фиг. 62.

Хордою называется прямая соединяющая концы дуги, напр. прямая DC есть хорда

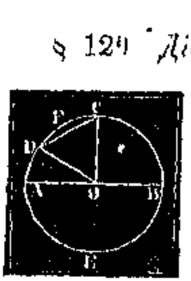
Предложенiе.

§ 128 *Дiаметръ раздѣляетъ по-поламъ какъ окружность такъ и кругъ.*

Согнемъ плоскость на дiаметрѣ AB (фиг. 62), всѣ точки дуги BEA совпадутъ съ точками дуги ACB: въ противномъ случаѣ точки окружности были бы не на равныхъ разстоянiяхъ отъ центра, — что не возможно

Предложенiе

§ 129 *Дiаметръ больше всякой хорды въ томъ же кругѣ.*



Фиг. 62.

Пусть AB — дiаметръ, DC — хорда (фиг. 62) надобно доказать, что AB больше DC. Проводемъ радiусы DO и CO Прямая CD короче ломанной COD т. е

$$CD < DO + CO;$$

а какъ DO = AO, CO = BO, какъ радiусы то

$$CD < AO + BO \text{ или } CD < AB.$$

Примѣчанiе. На основанiи этого предложенiя можно сказать, что *дiаметръ есть наибольшая хорда.*

§ 130. Всякая хорда дѣлитъ кругъ на двѣ части, каждая изъ нихъ называется сегментомъ. И такъ *сегментомъ называется часть круга, заключающаяся между хордою и соотвѣтствующею ей дугою;* напримѣръ DFCD (фиг. 62).

§ 131. Отъ соединенія центра съ концами какой нибудь дуги образуется уголъ, называемый центральнымъ. И такъ, *центральнымъ угломъ называется уголъ, образуемый двумя радіусами;* напримѣръ уголъ DOC (фиг. 62).

§ 132. *Секторомъ называется часть круга, заключающаяся между дугою окружности и двумя радіусами, проходящими чрезъ концы этой дуги;* напримѣръ ODFCO (фиг. 62).

§ 133. *Уголъ, котораго вершина на окружности, а бока пересѣкаютъ ее, называется вписаннымъ угломъ въ окружности;* напримѣръ уголъ ABC (фиг. 63).

Фиг. 63

Уголъ называется вписаннымъ въ сегментъ, когда его вершина находится на дугѣ сегмента, а бока проходятъ чрезъ концы этой дуги; напримѣръ уголъ FGH — вписанъ въ сегментѣ FHGF.

Очевидно, что уголъ, вписанный въ сегментѣ, будетъ въ тоже время вписанный въ кругѣ.

§ 134. *Многоугольникъ называется вписаннымъ въ кругъ, если всѣ его вершины находятся на окружности;* напримѣръ многоугольникъ ABCDEF.

Фиг. 64.

При этомъ кругъ относительно многоугольника называется описаннымъ около многоугольника. И *такъ кругъ называется описаннымъ около многоугольника, если его окружность проходитъ чрезъ всѣ вершины послѣдняго.*

§ 135. *Многоугольникъ называется описаннымъ около круга, если его бока суть касательныя къ окружности;* напримѣръ, многоугольникъ ABCDE — описанный (фиг. 65).

Фиг. 65

При этомъ кругъ относительно многоугольника называется вписаннымъ въ многоугольникѣ.

Поэтому *кругъ называется вписаннымъ въ многоугольникъ, если къ его окружности касаются всѣ бока послѣдняго.*

Предложеніе

§ 136. *Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, дѣлитъ по-поламъ какъ хорду, такъ и соотвѣтствующій ей центральный уголъ.*

Пусть O—центръ окружности и OD перпендикулярна къ хордѣ AB, надобно доказать, что AD=DB и уголъ AOD=DOB.

Фиг 66

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ BDO и AOD ипотенузы равны AO=BO, какъ радіусы, катетъ OD общій обоимъ треугольникамъ; слѣдовательно остальныя части этихъ треугольниковъ равны между собою (§ 94) и AD=BD а также и углы лежащіе противъ нихъ AOD=DOB

Предложеніе.

§ 137. *Прямая, соединяющая центръ с серединою хорды, перпендикулярна къ этой хордѣ и дѣлитъ пополамъ соотвѣтствующій ей центральный уголъ* (фиг. 66).

Пусть AD=BD; надобно доказать, что OD перпендикулярна къ AB

Въ треугольникахъ ADO и BDO, сторона AD=BD, по условію AO=BO, какъ радіусы; а DO общая: слѣдовательно, сходственные углы равны между собою (§ 91), т. е. ADO=BDO а потому DO перпендикулярна къ AB, и уголъ AOD=BOD

Предложеніе.

§ 138. *Перпендикуляръ, возставленный къ хордѣ изъ ея середины, проходитъ чрезъ центръ, и слѣдовательно* (§ 136) *дѣлитъ пополамъ центральный уголъ* (фиг. 66).

Радіусы AO и BO равны между собою, слѣдовательно точка O равно удалена отъ концовъ прямой AB, а потому должна лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ къ прямой изъ ея середины (§ 58).

Предложеніе.

§ 139 *Три точки, лежащія не на одной прямой, опредѣляютъ окружность.*

1) Чрезъ три точки A, B и C можно провесть окружность, если только онѣ не лежатъ на одной прямой.

Проведемъ прямыя AB и BC; изъ ихъ серединъ, D и F, возста вимъ перпендикуляры DO и FO къ AB и BC. они должны пересѣчься (§ 71). Точка пересѣченія O будучи на перпендикулярѣ DO, возставленномъ изъ середины прямой AB, равно удалена отъ концовъ этой прямой (§ 57) т. е. AO=BO. Тоже скажемъ и о разстояніяхъ BO и CO, потому что O находится на перпендикулярѣ FO слѣдовательно BO=CO. И такъ AO=BO=CO.

Фиг. 67.

Поэтому, если примемъ точку O за центръ и AO за радіусъ то окружность пройдетъ чрезъ точки A, B и C

2) Теперь докажемъ, что чрезъ три точки, лежащія не на прямой линіи, можно провесть только одну окружность. И дѣйствительно, всякая точка, различная отъ центра O окружности, описанной сейчас будетъ лежать внѣ одного изъ перпендикуляровъ DO и FO, возставленныхъ изъ серединъ прямыхъ AB и BC, слѣдовательно, кромѣ точки O, нѣтъ другой, лежащей въ равныхъ разстояніяхъ отъ точекъ A, B и C (§ 57, 2-е)

Предложеніе

§ 140. *Прямая не можетъ имѣть съ окружностью больше двухъ общихъ точекъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, напримѣръ, три общія точки прямой съ окружностью и соединивъ ихъ съ центромъ, мы получили бы три равныя линіи, проведенныя изъ одной точки (центра) къ прямой, что невозможно (§ 35).

---

11. Въ окружности, или въ окружностяхъ равныхъ радіусовъ, равенство одной изъ трехъ соотвѣтствующихъ частей: центральнаго угла, хорды и дуги, влечетъ за собою равенство двухъ прочихъ. — Центральные углы, хорды и дуги увеличиваются, а слѣдовательно и уменьшаются вмѣстѣ; хорды уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ центра, а при одинаковомъ удаленіи равны между собою. Параллельныя прямыя, пересѣкающія окружность, отрѣзываютъ отъ нея равныя дуги.

Предложеніе

§ 141. *Окружности, описанныя равными радіусами равны между собою*

Въ самомъ дѣлѣ, если плоскость одной окружности наложить на другую, центромъ на центръ, то обѣ окружности совмѣстятся; въ противномъ случаѣ ихъ точки находились бы на неравныхъ разстояніяхъ отъ центра

Вмѣстѣ съ тѣмъ понятно, что *и круги описанные равными радіусами, равны между собою*

Предложеніе

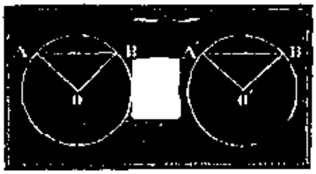
§ 142. *Въ кругѣ, или въ равныхъ кругахъ:*

1) *равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя хорды и дуги;*

2) *равнымъ хордамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы и дуги;*

3) *равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы и хорды*

1) Пусть радіусъ AO=A'O и центральный уголъ O=O'; надобно доказать, что хорда AB = A'B' и дуга AB=A'B.



Фиг. 68

Въ треугольникахъ ABO=A'B'O' между равными сторонами, AO=A'O'. BO BO заключаются равные углы O=O; слѣдовательно остальныя части треугольниковъ равны между собою (§ 89) и AB=A'B', т е хорды равны.

Чтобы доказать равенство дугъ, наложимъ секторъ A'O'B' на AOB такъ, чтобы центральные углы совмѣстились; тогда, по равенству радіусовъ въ обоихъ кругахъ, точка A' совпадетъ съ A и B' съ B И какъ концы дуги A'B' совмѣстились съ концами дуги AB, то и самыя дуги совмѣстятся, потому что онѣ описаны равными радіусами.

2) Пусть AO=A'O и хорда AB=A'B докажемъ равенство центральныхъ угловъ O и O, а изъ этого равенства будетъ слѣдовать равенство дугъ, что сейчасъ было доказано наложеніемъ секторовъ

Въ треугольникахъ ABO и A'B'O' три стороны одного равны тремъ сторонамъ другаго: AO=A'O' и BO=B'O, какъ радіусы, наконецъ AB=A'B' по условію; значитъ сходственные углы равны между собою (§ 91), и такъ уголъ O=O

3) Пусть АО=А'О и дуга АВ равна дугѣ А'В'; докажемъ, что центральные углы О и О равны между собою; а отсюда будетъ слѣдовать равенство хордъ (§ 142, 1-е) Наложимъ секторъ А'В'О' на АВО такъ, чтобы центры и радіусы А'О' и АО совпали: по равенству радіусовъ, точка А' совпадетъ съ А; дуга А'В пойдетъ по АВ, потому что онѣ описаны равными радіусами, при чемъ точка В совпадетъ съ В ибо дуги равны. И такъ, концы О и В прямой В'О совпали съ О и В, концами прямой ВО, значитъ и самыя прямыя совмѣстятся И такъ уголъ О'=О.

Предложеніе.

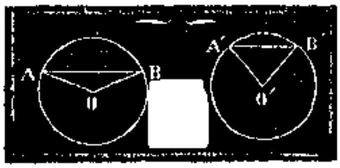
§ 143 *Въ кругѣ, или въ равныхъ кругахъ:*

1) *большему центральному углу соотвѣтствуютъ большая хорда и большая дуга;*

2) *большей хордѣ соотвѣтствуютъ больший центральный уголъ и большая дуга;*

3) *большей дугѣ соотвѣтствуютъ больший центральный уголъ и большая хорда.*

1) Пусть АО=А'О и уголъ О>О; докажемъ, что хорда АВ больше хорды А'В и дуга АВ>дуги А'В'.



Фиг 69

Въ треугольникахъ АВО и А'В'О между равными сторонами АО=А О ВО=ВО, заключаются неравные углы, О>О, слѣдовательно большему углу противулежитъ и большая сторона (§ 87); и такъ хорда АВ больше А'В.

Чтобы доказать неравенство дугъ АВ и А'В', наложимъ секторъ А'В'О' на АВО такъ чтобы центръ О совпалъ съ О, и конецъ А' радіуса А'О' совпалъ съ А; причемъ радіусъ О'В' пойдетъ внутри угла АОВ потому что уголъ О'<О стало быть, точка В упадетъ на дугу АВ, между точками А и В; слѣдовательно дуга А'В' меньше дуги АВ.

2) Пусть АО=А'О', и хорда АВ>А'В'; докажемъ, что центральный уголъ О>О'; а отсюда на основаніи сейчасъ сказаннаго, заключаемъ что дуга АВ>дуги А'В'.

Въ треугольникахъ АВО и АВО двѣ стороны равны между собою АО=А'О, ВО=В'О', а третіи стороны неравны, АВ>А'В; поэтому на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 98, заключаемъ, что противъ большей стороны лежитъ большій уголъ, значитъ уголъ O>O и дуг: AB>дуги A'B' (1-е).

3) Пусть AO=A'O' и дуга AB>A'B'; докажемъ, что уголъ O>O' и отсюда заключимъ, что хорда AB больше хорды A'B' (§ 143, 1-е) Наложимъ секторъ A'B'O на секторъ ABO такъ, чтобы радіусы AO и AO совмѣстились концами: дуга A'B' пойдетъ по AB, потому что онѣ описаны равными радіусами; а какъ дуга A'B' меньше дуги AB, то конецъ B придется между A и B на дугѣ AB, и радіусъ O'B будетъ внутри угла AOB слѣдовательно уголъ O>O' и хорда AB>хорды A'B' (1-е).

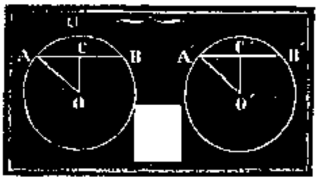
Предложеніе

§ 14. . *Во кругѣ или въ равныхъ кругахъ.*

1) *хорды, равно-удаленныя отъ центра, равны между собою*

2) *обратно, равныя хорды равно удалены отъ центра.*

Пусть AO=A'O, и хорды AB и A'B' равно удалены отъ центровъ,



Фиг. 70.

т. е. перпендикуляры OC и O'C' опущенные изъ центровъ, на эти хорды, равны между собою· докажемъ что хорда AB= A'B'.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ACO и A'C'O' ипотенуза AO=A'O', катетъ CO=CO' по условію; слѣдовательно и остальныя части равны (§ 94), значитъ AC=A'C'; но AC составляетъ половину хорды AB (§ 136), по той же причинѣ A'C' есть половина A'B'· а если половины равны, то и цѣлыя равны, слѣд: хорда AB=A'B'.

2) Пусть AO=A'O' хорда AB=A'B'; докажемъ, что перпендикуляръ CO=C'O'

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ACO и A'C'O' ипотенуза AO=A'O', катеты AC и A'C' также равны, потому что перпендикуляры OC и O'C', проведенные изъ центровъ на хорды AB и A'B' дѣлятъ ихъ пополамъ: а какъ самыя хорды равны, то и половины ихъ равны. И такъ остальныя части треугольниковъ равны (§ 94), значитъ CO=C'O'

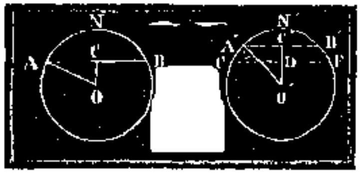
Предложенiе

§ 145. *Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

1) *хорды уменьшаются по мѣрѣ удаленiя отъ центра*

2) *обратно изъ двухъ неравныхъ хордъ большая ближе къ центру.*

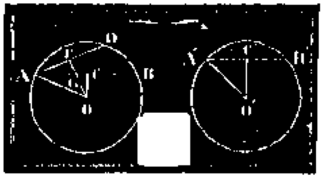
1) Пусть AO=A'O', а перпендикуляръ O'C', опущенный изъ центра O' на хорду A'B', полагаемъ больше перпендикуляра CO проведеннаго на хорду AB; докажемъ, что хорда A'B' меньше хорды AB.



Фиг. 71

Такъ какъ по условiю OC'>OC, то отложимъ O'D=OC и проведемъ, чрезъ точку D, хорду CF перпендикулярно къ O'C'; получимъ хорду CF=AB потому что хорды равно-удаленныя отъ центра, равны между собою. Дуга CN'F больше дуги A'N'B', а большей дугѣ соотвѣтствуетъ большая хорда (§ 143); слѣдовательно хорда CF больше A'B', и AB>A'B'

2) Пусть AO=A'O' и хорда AB>A'B' докажемъ что перпендикуляръ OC<O'C'.



Фиг. 72

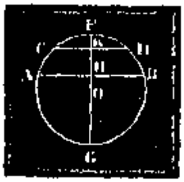
Въ слѣдствiе неравенства хордъ AB и A'B', соотвѣтствующiя имъ дуги неравны (§ 143), именно дуга AB больше A'B'. Отложимъ дугу AD равную дугѣ A'B', значитъ, хорда AD=хордѣ A'B' (§ 142), и перпендикуляръ OF=O'C' потому что равныя хорды равно удалены отъ центра. Такъ какъ OC перпендикулярна къ AB, то OG будетъ наклонною; поэтому OC<OG а какъ OG<OF то подавно OC<OF или OC<O'C', потому что OF и O'C' равны между собою

Предложенiе

§ 146. *Дуги окружности заключающiяся между параллельными линiями, равны между собою.*

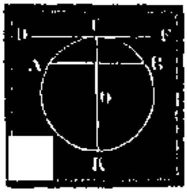
1) Пусть хорда AB параллельна хордѣ CD, докажемъ, что дуга AC равна дугѣ BD Проведемъ изъ центра O перпендикуляръ OF къ

хордѣ CD, онъ будетъ перпендикуляренъ и къ AB. (§ 66) Согнувъ плоскость на діаметрѣ FG, найдемъ, что AH и CK соотвѣтственно пойдутъ по HB к KD, по причинѣ равенства прямыхъ угловъ при H и при K а какъ AH=HB (§ 136), то точка A упадетъ въ B; по равенству же CK и KD, точка C упадетъ въ D. И такъ концы дуги AC совпали съ концами дуги BD, слѣдовательно и самыя дуги совпадутъ, потому что онѣ описаны равными радіусами Значитъ дуга AC=дугѣ BD



Фиг. 73.

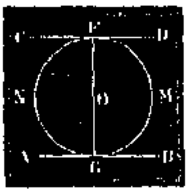
2) Пусть хорда AB параллельна касательной DF, которой точка касанія находится въ C; докажемъ, что дуга AC равна дугѣ CB Соединивъ центръ O съ точкою касанія C, получимъ CO, перпендикулярную къ касательной DF (§ 123); она въ тоже время перпендикулярна и къ AB потому что AB параллельна DF. Согнувъ плоскость на діаметрѣ CK, найдемъ, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, что дуга AC совмѣстится съ дугою BC; слѣдовательно онѣ равны между собою



Фиг 74

3) Пусть AB параллельна CD, и каждая изъ нихъ касательна къ окружности; докажемъ, что дуга FMG=дугѣ FNG.

Соединимъ центръ O съ точкою касанія F, получимъ OF, перпендикулярную къ касательной CD (§ 123), она же будетъ перпендикулярна и къ AB, потому что AB параллельна CD; а какъ перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, падаетъ въ точку касанія, то продолженіе FO пройдетъ въ точку касанія G. И такъ FOG есть діаметръ; а извѣстно, что діаметръ дѣлитъ окружность пополамъ, слѣдовательно дуга FMG=дугѣ FNG



Фиг. 75

) Отношеніе угловъ, которыхъ бока встрѣчаютъ окружности или къ ней касаются, къ соотвѣтствующимъ центральнымъ угламъ.

Предложеніе.

§ 147. *Вписанный уголъ составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ, заключающейся между его боками*

1) Пусть центръ O лежитъ на бокѣ AB вписаннаго угла A надобно доказать, что уголъ A составляетъ половину центральнаго угла BOC соотвѣтствующаго дугѣ BC.

Фиг. 76

Въ треугольникѣ ACO внѣшній уголъ BOC равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ A и C (§ 79); но треугольникъ ACO равнобедренный вслѣдствіе равенства радіусовъ AO и CO, слѣд. уголъ $A=C$ (§ 83); итакъ уголъ

$BOC=2A$ отсюда уголъ $A=\frac{1}{2}BOC$

2) Пусть центръ O находится внутри вписаннаго угла BAC, докажемъ, что уголъ $BAC=\frac{1}{2}BOC$.

Фиг. 77

Проведя діаметръ AD, получимъ уголъ

$$BAC=BAD+CAD,$$

но уголъ BAD, какъ доказано въ предъидущемъ случаѣ, равенъ половинѣ угла BOD, по той же причинѣ уголъ $CAD=\frac{1}{2}DOC$, слѣд. $BAC=\frac{1}{2}BOD+\frac{1}{2}DOC$, но $BOD+DOC=BOC$ значитъ

уголъ $BAC=\frac{1}{2}BOC$.

3) Пусть центръ лежитъ внѣ вписаннаго угла BAC; докажемъ что $BAC=\frac{1}{2}BOC$.

Проведя діаметръ AD, получимъ уголъ

$$BAC=BAD-CAD.$$

Фиг 78

На основаніи перваго случая имѣемъ

$$BAD=\frac{1}{2}BOD,$$
$$CAD=\frac{1}{2}COD,$$

слѣдовательно $BAC=\frac{1}{2}BOD-\frac{1}{2}COD$

или $BAC=\frac{1}{2}BOC$.

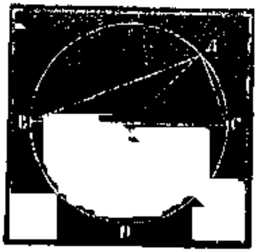
§ 148. *Слѣдствіе 1-е. Всѣ углы, вписанные въ одномъ и томъ же сегментѣ, равны между собою;* потому что каждый изъ нихъ составляетъ половину одного и того же центральнаго угла соотвѣтствующаго одной и той же дугѣ.

§ 149. *Слѣдствіе 2-е. Всякій уголъ вписанный въ полукругъ, равенъ прямому углу* (фиг. 79).

Пусть BC означаетъ діаметръ окружности; надобно доказать, что вписанный уголъ BAC — прямой. Соединимъ центръ O съ вершиною A

вписанный уголъ $B=\frac{1}{2}AOC$,

вписанный уголъ $C=\frac{1}{2}BOA$,



Фиг 79.

слѣд. $B+C=\frac{AOC+AOB}{2}$;

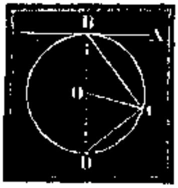
но сумма смежныхъ угловъ AOC+AOB равна двумъ прямымъ угламъ, слѣд. сумма B+C равна прямому углу. Итакъ въ треугольникѣ ABC сумма двухъ угловъ B и C равна прямому углу, поэтому третій уголъ BAC равенъ также прямому углу.

Впрочемъ, можно и такъ объяснить: вписанный уголъ BAC составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго полуокружности BDC а этотъ послѣдній уголъ равенъ двумъ прямымъ угламъ.

Предложеніе

§ 150. *Уголъ, составленный хордою и касательною, проведенною чрезъ конецъ этой хорды, равенъ половинѣ центральнаго угла соотвѣтствующаго дугѣ, заключающейся между его боками.*

Пусть B есть точка касанія прямой AB къ окружности: надобно доказать что уголъ ABC равенъ половинѣ центральнаго угла BOC.



Фиг. 80.

Проведемъ діаметръ BOD и хорду CD, получимъ треугольникъ BCD, въ которомъ уголъ BCD прямой (§149), слѣд. остальные два угла, D и DBC, вмѣстѣ, составляютъ прямой уголъ. Но діаметръ BD, проведенный въ точку касанія B перпендикуляренъ къ касательной AB, значитъ уголъ DBC служитъ также дополненіемъ до прямаго углу ABC слѣд

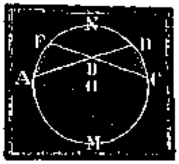
уголъ ABC=D,

а уголъ D, какъ вписанный, составляетъ половину центральнаго угла BOC, поэтому и уголъ ABC составляетъ половину угла BOC.

Предложеніе

§ 151. *Уголъ, котораго вершина внутри круга, равенъ половинѣ суммы центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между боками угла и ихъ продолженіями*

Докажемъ, что уголъ ABC равенъ половинѣ суммы центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и FND.



Фиг. 81

Проведя хорду CD, получимъ треугольникъ BCD и опредѣлимъ внѣшній его уголъ ABC

$$ABC = D + C;$$

углы D и C, какъ вписанные, равны, каждый, половинѣ центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и FND· слѣдовательно предложеніе доказано.

Предложеніе

§ 152. *Уголъ, котораго вершина внѣ круга, равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между его боками.*

1) Докажемъ, что уголъ B равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AC и DF.

Фиг. 82.

Проведя хорду CD получимъ треугольникъ BCD внѣшній его уголъ

$$ADC = B + C,$$

отсюда $B = ADC - C$.

Но углы ADC и C суть вписанные; слѣдовательно ADC равенъ половинѣ центральнаго угла соотвѣтствующаго дугѣ AC, а уголъ C равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ DF, слѣдовательно уголъ B равент половинѣ разности упомянутыхъ центральныхъ угловъ.

2) Пусть BC—касательная, докажемъ, что уголъ ABC равенъ полуразности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AC и CD.

Фиг. 83

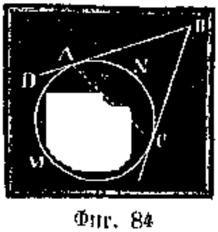
Проведя хорду AC, получимъ треугольникъ BCA опредѣлимъ внѣшній его уголъ ACF,

уголъ $ACF = A + B$

отсюда $B = ACF - A$.

Уголъ ACF равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ AC (§ 150); уголъ A равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ CD, слѣдовательно уголъ B равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AC и CD

3) Пусть бока AB и BC угла B будутъ касательные, докажемъ, что



Фиг. 84

уголъ B равенъ полуразности центральныхъ угловъ соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и ANC

Соединивъ точки касанія, получимъ треугольникъ ACB; внѣшній уголъ его

CAD= B+ACB;

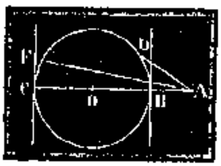
отсюда B=CAD -ACB.

Основываясь на § 150, найдемъ, что углы CAD и ACB, порознь, равны половинамъ центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и ANC

13. Условія, при которыхъ окружности пересѣкаются касаются или совсѣмъ не имѣютъ общихъ точекъ.

§ 153. *Нормальною линіею или нормальною къ окружности называется перпендикуляръ къ касательной, проходящій чрезъ точку касанія.*

Чтобы провесть нормаль къ окружности чрезъ какую нибудь точку A



Фиг 85

стоитъ только соединить прямою точку A съ центромъ: эта прямая пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ B и C, и будетъ перпендикулярна къ касательнымъ, проведеннымъ чрезъ точки B и C (§ 123). Мы будемъ различать, по длинѣ, двѣ нормальныя, AB и AC, которыхъ направленія совпадаютъ.

Всякая прямая, AD, AF,.., проведенная изъ какой нибудь точки A къ точкамъ окружности D, F,.. за исключеніемъ точекъ B и C, лежащихъ на нормальной, называется *наклонною къ окружности.*

Наклонныя называются *равно-удаленными* отъ нормали, если дуги заключающіяся между наклонными и нормалью, равны между собою, если-жъ дуги эти неравны, то наклонныя будутъ *неравно-удалены* отъ нормали.

Предложеніе.

§ 154. *Если изъ какой нибудь точки провести двѣ нормальныя и наклонную къ окружности, то наклонная больше одной нормальной и меньше другой.*

1) Пусть изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены двѣ нормали, AB и AC и наклонная AD, докажемъ, что

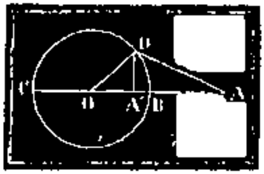
$$AD>AB \text{ и } AD<AC.$$

Соединимъ точку D съ центромъ O Прямая AO короче ломанной ADO, т. е.

$$AB+BO<AD+DO$$

но радіусъ $BO=DO$,

слѣдовательно $AB<AD$



Фиг 86

Прямая AD короче ломанной AOD, т. е

$$AD<AO+OD$$

но радіусъ $OD=OC$ слѣдовательно

$$AD<AO+OC$$

или $AD<AC$.

2) Пусть изъ точки A' взятой внутри круга, проведены двѣ нормали A'B и A'C; докажемъ, что $A'D>A'B$ и $A'D<A'C$

Ломанная OA'D больше прямой OD, т. е

$$OA'+A'D>OD$$

$$OD=OB=OA'+A'B$$

слѣдовательно $OA'+A'D>OA'+A'B$,

отсюда $A'D>A'B$.

Прямая A'D короче ломанной A'O+OD а $OD=CO$ слѣдовательно

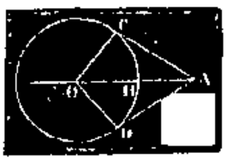
$$A'D<A'C.$$

§ 155 *Слѣдствіе.* Нормаль AB есть кратчайшее разстояніе отъ точки A до окружности· а нормаль AC есть наибольшее разстояніе отъ точки до окружности.

Предложеніе.

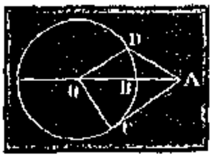
§ 156. *Если изъ какой нибудь точки провесть къ окружности нормаль и разныя наклонныя, то: 1) наклонныя, равно-удаленныя отъ нормали, равны между собою; 2) наклонныя, неравно-удаленныя отъ нормали, неравны между собою.*

1) Пусть дуга BC равна дугѣ BD докажемъ, что наклонная $AC=AD$. Проведя радіусы CO и DO получимъ равные центральные углы COB и BOD (§ 142, 3) Поэтому, въ треугольникахъ ACO и AOD, между равными сторонами ($CO=DO$, $AO=$общая) заключаются равные углы; значитъ остальныя сходственныя части равны между собою и $AC=AD$



Фиг 87

2) Пусть дуга BC больше дуги BD, докажемъ, что наклонная AC>AD. Проведя радiусы CO и DO, найдемъ, что центральный уголъ COB больше угла BOD (§ 143, 3). Поэтому въ треугольникахъ ACO и ADO, между равными сторонами (CO=DO, AO—общая), заключаются неравные углы; слѣдовательно противъ большаго угла лежитъ большая сторона (§ 87) и AC>AD

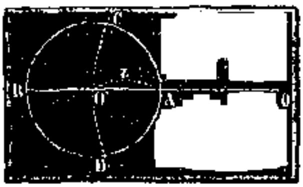


Фиг. 88

§ 157. Уже замѣчено (§ 139), что двѣ окружности, имѣющiя три общiя точки, лежащiя не на одной прямой, совмѣщаются между собою; поэтому двѣ отдѣльныя окружности не могутъ имѣть больше двухъ общихъ точекъ. *Двѣ окружности называются пересѣкающимися если имѣютъ двѣ общiя точки. При одной общеи точкѣ онѣ называются касательными*

Предложенiе

§ 158. *Двѣ окружности пересѣкаются, если разстоянiе между ихъ центрами меньше суммы радiусовъ, а больше ихъ разности.*



Фиг 89

Пусть дана окружность, которой центръ O и радiусъ r, положимъ еще, что O есть центръ другой окружности, которой радiусъ назовемъ буквою R, а разстоянiе между центрами—буквою D; опредѣлимъ радiусъ R на основанiи условiй предложенiя, по которымъ

$$D<R+r \text{ и } D>R-r,$$

отсюда

$$R>D-r \text{ и } R<D+r$$

Проведя прямую чрезъ центры O и O до пересѣченiя окружности въ точкахъ A и B, получимъ $D=OO$, $r=O'A=O'B$, причемъ OA и OB будутъ нормали для окружности O. Вставивъ, вмѣсто D и r, имъ равныя, въ предъидущiя неравенства, получимъ $R>OO'-AO'$ и $R<OO+O'B$ или

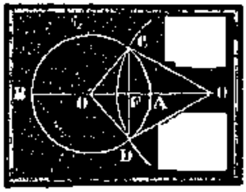
$$R>OA \text{ и } R<OB.$$

Итакъ, мы опредѣлили между какими величинами заключается радiусъ R окружности O: онъ больше одной нормали и меньше другой, которыя проведены изъ точки O къ окружности O'; поэтому, если отъ точки O по нормали OB отложимъ радiусъ R, то конецъ его упадетъ между точками A и B, вслѣдствiе этого окружность, описанная радiусомъ R, пересѣчетъ окружность O′ въ двухъ точкахъ: одна будетъ по одной сторонѣ нормали OB а другая по другой ея сторонѣ

Предложеніе

§ 159. *Прямая, соединяющая центры двухъ пересѣкающихся круговъ, перпендикулярна къ общей ихъ хордѣ и дѣлитъ ее пополамъ*

Пусть O и O′ означаютъ центры двухъ окружностей, пересѣкающихся въ точкахъ C и D, прямая CD будетъ ихъ общая хорда Докажемъ что прямая OO′, соединяющая центры, перпендикулярна къ CD и что $CF = DF$. Разсматривая положеніе точки O относительно концовъ C и D прямой CD, находимъ, что $CO = DO$, какъ радіусы окружности O; поэтому точка O должна лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ середины прямой CD (§ 58). Также объяснится, что



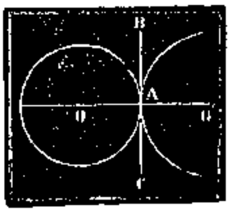
Фиг. 90.

на этомъ же перпендикулярѣ должна лежать точка O′, и такъ, перпендикуляръ, возставленный изъ середины прямой CD, совпадетъ съ прямою OO′ т. е OO′ перпендикулярна къ прямой CD и проходитъ чрезъ ея середину

Предложеніе

§ 160. *Двѣ окружности касаются снаружи если разстояніе между ихъ центрами равно суммѣ радіусовъ*

Пусть дана окружность, которой центръ въ O и радіусъ r; положимъ еще, что O′ естѣ центръ другой окружности, которой радіусъ назовемъ буквою R; проведемъ прямую OO′, означимъ пересѣченіе ея съ окружностью O′ буквою A, а разстояніе между центрами назовемъ буквою D, т. е. положимъ $OO' = D$. Вслѣдствіе условія предложенія, имѣемъ $D = R + r$, а отсюда



Фиг 91

$$R = D - r \text{ или } R = OO' - AO',$$

слѣд $R = O'A$

Но O′A есть меньшая нормаль, проведенная изъ точки O къ окружности O′, слѣдовательно она меньше всякой наклонной, значитъ, всѣ точки окружности O, кромѣ A будутъ лежать внѣ точекъ другой окружности O′. И такъ, окружности, имѣя только одну общую точку A будутъ касаться.

*

Перпендикуляръ BC, проведенный чрезъ точку A къ линіи OO будетъ общею касательною обѣимъ окружностямъ (§ 122)

Предложеніе

§ 161 *Двѣ окружности касаются и лежатъ одна внутри другой, если разстояніе между центрами равно разности радіусовъ*

Фиг 92

Пусть O и r означаютъ центръ и радіусъ меньшаго круга, a O′ и R центръ и радіусъ другаго круга. Чрезъ центръ O и O′ проведемъ прямую до пересѣченія съ окружностью O въ точкѣ A. По условію имѣемъ

$$D=R-r,$$

гдѣ D означаетъ разстояніе между центрами изъ этого равенства имѣемъ

$$R=D+r$$

или

$$R=OO'+OA=O'A$$

Но OA есть большая нормаль, проведенная изъ O къ окружности которой радіусъ OA; и потому она больше всѣхъ наклонныхъ, проведенныхъ изъ O′ къ этой окружности; значитъ всѣ точки окружности описанной радіусомъ O′A, лежатъ внѣ другой окружности, и только A принадлежитъ имъ обѣимъ

Перпендикуляръ BC, проведенный чрезъ A къ линіи OA есть общая касательная къ той и къ другой окружности

Предложеніе

§ 162 *Двѣ окружности касаются, если у нихъ есть общая точка на линіи, проходящей чрезъ ихъ центры*

И дѣйствительно, смотря по тому, будетъ ли эта общая точка между центрами, или на продолженіи линіи центровъ, разстояніе между центрами будетъ равно суммѣ или разности радіусовъ, слѣдовательно окружности касаются (§§ 160 и 161)

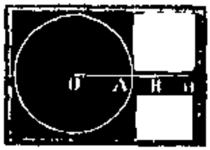
Обратно. Если двѣ окружности касаются, то точка ихъ касанія лежитъ на линіи центровъ

Положимъ, что окружности O и O′ касаются въ точкѣ A (фиг. 91) снаружи. Кратчайшее разстояніе отъ центра O до окружности O′ есть радіусъ OA слѣдовательно радіусъ OA есть нормаль проведенная къ окружности O изъ точки O а такъ какъ нормаль проходитъ чрезъ центръ (§ 153) O′, то три точки O, A и O лежать на одной прямой и предложеніе доказано Также докажется тотъ случай, когда окружности касаются внутри

Предложеніе.

§ 163. *Двѣ окружности лежатъ одна внѣ другой если разстояніе между центрами больше суммы радіусовъ.*

Пусть дана окружность, которой центръ въ O′ радіусъ этой окружности назовемъ чрезъ r; положимъ еще, что O есть центръ другой окружности которой радіусъ назовемъ буквою R и опредѣлимъ его вслѣдствіе условія $D > R + r$, гдѣ D означаетъ разстояніе между центрами, т. е. $OO' = D$ Изъ предъидущаго неравенства имѣемъ $R < D - r$ или $R < OO' - O'A$



Фиг 93

слѣд. $$R < OA.$$

Но OA есть меньшая нормаль, проведенная изъ точки O къ окружности, описанной радіусомъ O′A, —слѣдовательно она меньше всѣхъ наклонныхъ проведенныхъ изъ O къ окружности O′, а какъ радіусъ R меньше OA, то всѣ точки окружности O будутъ лежать внѣ окружности O′

Предложеніе.

§ 164. *Двѣ окружности лежатъ одна внутри другой, если разстояніе между центрами меньше разности радіусовъ*

Пусть дана окружность, которой центръ въ O, радіусъ ея назовемъ буквою r; положимъ еще, что O есть центръ другой окружности, которой радіусъ назовемъ буквою R; полагая, что $r < R$, опредѣлимъ радіусъ R. По условію $D < R - r$, гдѣ $D = OO'$, отсюда $R > D + r$ или вставивъ $D = OO'$, $r = O'B$, получимъ $R > OO' + O'B$ или

Фиг. 94

$$R > OB$$

Но прямая OB есть большая нормаль, проведенная изъ O къ окружности описанной радіусомъ O′A; слѣдовательно она больше всѣхъ наклонныхъ, проведенныхъ изъ O къ точкамъ этой окружности. А какъ радіусъ R больше нормали OB, то всѣ точки окружности, описанной этимъ радіусомъ, должны лежать внѣ другой окружности.

Упражненія. Составить предложенія обратныя, изложеннымъ въ §§ 158, 160, 161, 163 и 164 и доказать ихъ справедливость.

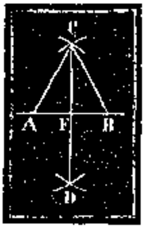
ВОПРОСЫ

14 Возставить перпендикуляръ къ прямой: въ ея серединѣ, въ какой ни есть точкѣ и въ одномъ изъ концовъ. На прямую опустить перпендикуляръ изъ данной точки Чрезъ данную точку провесть параллельную данной прямой.

Вопросъ

§ 165 *Возставить перпендикуляръ къ прямой въ ея серединѣ*

Пусть AB означаетъ данную прямую Изъ конца ея A, какъ центра радіусомъ, равнымъ данной прямой AB, опишемъ окружность; изъ другаго конца B, какъ центра тѣмъ же радіусомъ BA, опишемъ другую окружность: онѣ пересѣкутся, потому что разстояніе между центрами AB меньше суммы радіусовъ AB+AB, и это же разстояніе больше ихъ разности AB—AB, равной нулю. Пусть C и D означаютъ двѣ точки пересѣченія окружностей; прямая CD, проведенная чрезъ эти точки какъ общая хорда двухъ пересѣкающихся окружностей, будетъ перпендикулярна къ AB (§ 159) Остается доказать, что AF=BF. Проведя BC и AC, получимъ два прямоугольные треугольника BCF и ACF, въ которыхъ ипотенуза BC=AC, какъ равные радіусы, катетъ CF—общій; слѣдовательно AF=BF (§ 94).



Фиг 95

Примѣчаніе Для рѣшенія вопроса можно за радіусы принять произвольныя линіи, лишь бы только онѣ были больше половины данной прямой AB и равны между собою.

§ 166. Предъидущее построеніе рѣшаетъ вопрос о *раздѣленіи прямой линіи на двѣ равныя части*

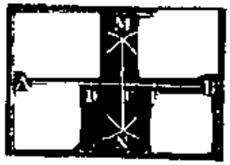
Вопросъ

§ 167 *Возставить перпендикуляръ къ прямой въ какой ни есть ея точкѣ.*

Пусть требуется провесть перпендикуляръ къ AB, чрезъ какую ни будь ея точку C

Отложимъ произвольныя, равныя части CD=CF Къ прямой DF примѣнимъ рѣшеніе предъидущаго вопроса, т. е. изъ D, а потомъ изъ F какъ центровъ, опишемъ окружности радіусами равными прямой

DF и точки пересѣченія M и N соединимъ прямою MN; она раздѣлитъ DF по-поламъ, слѣдовательно пройдетъ чрезъ C и будетъ перпендикулярна къ AB (§ 165)



Фиг 96

Вопросъ

§ 168. *Возставить къ прямой перпендикуляръ, проходящій чрезъ ея конецъ.*

Требуется провесть перпендикуляръ къ AB проходящій чрезъ конецъ A не продолжая прямой.

Изъ произвольной точки O, лежащей въ прямомъ углу, опишемъ окружность радіусомъ AO а изъ точки C, гдѣ окружность пересѣчетъ прямую AB, проведемъ діаметръ COD наконецъ соединимъ точку D съ A тогда получимъ искомый перпендикуляръ AD — потому что уголъ DAC вписанъ въ полуокружности (§ 149)

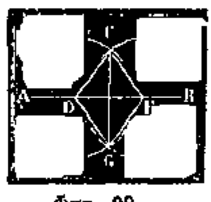
Фиг 97

Вопросъ.

§ 169. *На прямую опустить перпендикуляръ изъ данной точки*

Пусть требуется опустить перпендикуляръ изъ точки C на прямую AB.

На прямой AB возьмемъ произвольныя двѣ точки D и F, на глазъ одну съ одной стороны искомаго перпендикуляра, а другую съ другой стороны. Изъ точки D, какъ центра, опишемъ окружность радіусомъ CD, и изъ точки F, какъ центра, опишемъ окружность радіусомъ CF; обѣ окружности пересѣкутся, ибо въ слѣдствіе построенія онѣ имѣютъ общую точку C внѣ линіи DF, соединяющей центры D и F (§ 158).



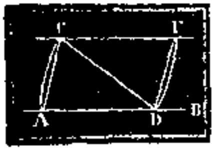
Фиг 98

Соединивъ прямою точки пересѣченія C и G, получимъ искомый перпендикуляръ CG, потому что въ пересѣкающихся кругахъ линія центровъ DF перпендикулярна къ общей хордѣ CG (§ 159).

Вопросъ.

§ 170 *Чрезъ данную точку провесть параллельную данной прямой.*

Пусть требуется провесть чрезъ точку C прямую, параллельную AB Точку C соединимъ съ какою нибудь точкою D, взятою на прямой AB, принявъ точку D за центръ, радіусомъ DC, опишемъ дугу CA потомъ изъ точки C, тѣмъ-же радіусомъ DC опишемъ дугу DF· наконецъ изъ точки D радіусомъ, равнымъ хордѣ AC, опишемъ дугу и точку пересѣченія F соединимъ съ C прямою CF,—это и будетъ искомая параллельная. Въ самомъ дѣлѣ рав ныя хорды AC и DF, принадлежа кругамъ, описаннымъ равными радіусами, должны лежать противъ

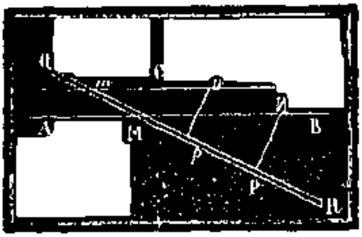


Фиг 99

равныхъ центральныхъ угловъ (ф. 142, 2): слѣдовательно, уголъ FCD равенъ ADC; а по равенству этихъ угловъ, внутреннихъ противуположныхъ относительно AB и CF при сѣкущей CD заключаемъ о параллельности прямыхъ CF и AB

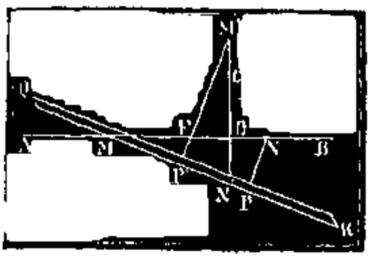
§ 171. *Примѣчаніе.* Въ практикѣ, для проведенія параллельныхъ и перпендикулярныхъ линій, съ большимъ удобствомъ употребляютъ обыкновенную линейку и прямоугольный (чертежный) треугольникъ.

1) Пусть требуется чрезъ точку C провести прямую параллельно къ линіи A Къ линіи AB приставимъ ипотенузу прямоугольнаго треугольника MNP, а къ одному изъ катетовъ этого треугольника приложимъ линейку QR, потомъ, не сдвигая линейки, подвинемъ треугольникъ по линейкѣ до тѣхъ поръ пока его ипотенуза не пройдетъ чрезъ точку C: тогда линія, проведенная по ребру mn треугольника mnp, рѣшитъ вопросъ, потому что при линіяхъ MN и mn и сѣкущей QR соотвѣтственные углы NMP и nmp равны между собою



Фиг. 100.

2) Положимъ, что требуется чрезъ точку C провесть перпендикуляръ къ прямой AB. Какъ и въ предъидущемъ рѣшеніи приставимъ треугольникъ MNP ипотенузою MN къ прямой AB, а линейку QR— къ катету MP; потомъ, не сдвигая линейки, переставимъ треугольникъ другимъ катетомъ NP на линейку и будемъ подвигать треугольникъ пока ипотенуза M'N' не пройдетъ чрезъ точку C; тогда линія, проведенная по краю M'N' треугольника, будетъ перпендикулярна къ AB. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ MFP' и FM'O, уголъ P'MF= FM'O, какъ тотъ же уголъ чертежнаго треугольника, уголъ MFP'=M'FO, какъ противуположные, слѣд. и третіе углы равны: MP'F=M'OF, но первый изъ этихъ угловъ прямой, слѣд. и уголъ M'OF -прямой.



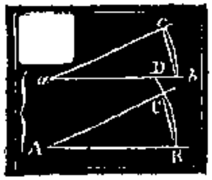
Фиг 101.

15 Построить уголъ, равный данному. — Совокупить произвольное число угловъ. — Изъ угла вычесть другой уголъ. Уголъ раздѣлить пополамъ и вообще на степени числа 2. Тѣже задачи относительно дугъ.

Вопросъ

§ 172. *На прямой при данной на ней точкѣ, построить уголъ равный данному углу.*

Пусть на прямой AB, при точкѣ A, требуется построить уголъ равный углу a. Изъ вершины a, какъ центра, опишемъ дугу bc произвольнымъ радіусомъ; а потомъ изъ точки A, какъ центра, тѣмъ же радіусомъ, опишемъ дугу BD. Изъ точки B радіусомъ, равнымъ хордѣ bc, опишемъ дугу, и точку пересѣченія C соединимъ съ A, получимъ уголъ $A = a$; потому что въ кругахъ, описанныхъ равными радіусами, равнымъ хордамъ, BC и bc соотвѣтствуютъ равные центральные углы.

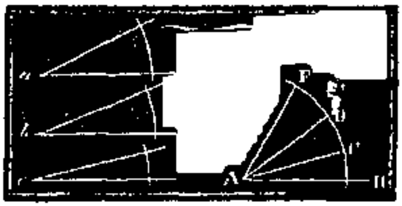


Фиг. 102

Вопросъ

§ 173. *Требуется совокупить въ одинъ уголъ произвольное число угловъ, напримѣръ a, b, c.*

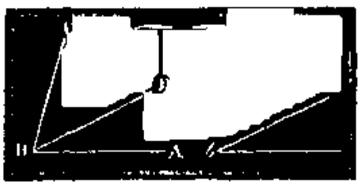
Проведемъ какую нибудь прямую AB и при точкѣ A, взятой на ней, нанесемъ уголъ BAC, равный a; на прямой AC, при точкѣ A, нанесемъ уголъ CAD, равный b; наконецъ на бокѣ AD при точкѣ A нанесемъ уголъ DAF, равный c. Очевидно, что уголъ



Фиг. 103

$$BAF = a + b + c$$

§ 174. *Чтобы изъ угла ABC вычесть уголъ b* построимъ внутри его на одномъ изъ боковъ, напримѣръ на AB, при точкѣ B уголъ ABD, равный данному углу b, уголъ CBD составитъ искомую разность.

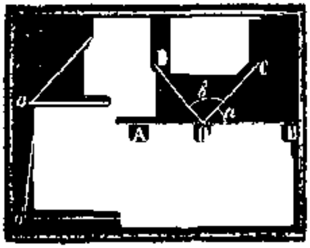


Фиг. 104

Вопросъ

§ 175. *По извѣстнымъ двумъ угламъ треугольника, построить третій уголъ.*

Пусть *а* и *б* означаютъ данные углы Проведемъ прямую AB и означимъ на ней какую нибудь точку O. При этой точкѣ нанесемъ уголъ BOC=*а*, потомъ уголъ COD=*б*; уголъ AOD будетъ искомый, потому что онъ служитъ дополненіемъ до 2-хъ прямыхъ суммѣ угловъ *а*+*б*, и искомый уголъ треугольника имѣетъ тоже дополненіе *а*+*б*, ибо сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ



Фиг 105

Вопросъ

§ 176. *Уголъ раздѣлить по-поламъ.*

Пусть требуется раздѣлить по-поламъ уголъ BAC Опишемъ дугу BDC, между боками угла, принявъ вершину A за центръ, а за радіусъ произвольную длину. Изъ точекъ B и C, какъ центровъ, радіусами, равными хордѣ BC опишемъ дуги, и пересѣченіе ихъ F соединимъ съ вершиною A: тогда получимъ уголъ BAF=FAC Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ABF и ACF, AB=AC BF=CF, AF—общая; слѣдовательно и углы, лежащіе противъ равныхъ сторонъ, BF и CF, равны, т. е. уголъ BAF=CAF

Фиг. 106.

§ 177. Раздѣливъ по-поламъ каждый уголъ, составляющій половину угла BAC, весь уголъ раздѣлимъ на 4 равныя части; а раздѣливъ по-поламъ каждую изъ этихъ четвертыхъ частей, раздѣлимъ весь уголъ BAC на 8 равныхъ частей. Продолжая такимъ образомъ, раздѣлимъ уголъ на 16, 32 и т д равныхъ частей, и вообще на всякую степень числа 2.

§ 178. Чтобы дугу BC раздѣлить по-поламъ, соединимъ концыя ея B и C съ центромъ A; такимъ образомъ получимъ уголъ BAC, который умѣемъ раздѣлить по-поламъ, пусть уголъ BAF=CAF; а какъ равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги (§ 142), то дуга BD равна дугѣ CD

Этимъ способомъ дугу можно раздѣлить на 4 8 16 и т д равныхъ частей, и вообще на всякую степень числа 2

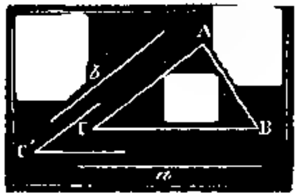
Примѣчаніе. Дуги можно описывать радіусомъ различнымъ отъ хорды BC (§ 176) лишь бы только онѣ пересѣкались.

16. Построить треугольникъ по даннымъ частямъ достаточнымъ для опредѣленія этой фигуры.

Вопросъ

§ 179. *Даны двѣ стороны a и b треугольника и уголъ C′ ими составленный, построить треугольникъ*

При точкѣ C на неопредѣленной прямой построимъ уголъ C равный C′ и по бокамъ его отложимъ $CB = a$, $CA = b$; соединивъ точки A и B получимъ искомый треугольникъ ABC (§ 95).

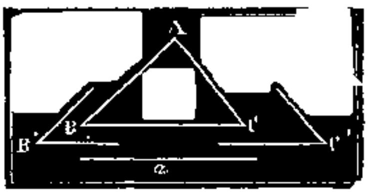


Фиг 107

Вопросъ

§ 180. *Дана сторона и два угла треугольника построить треугольникъ.*

1) Пусть даны углы B и C, прилежащіе данному боку a. Отложивъ на неопредѣленной прямой часть BC равную a, и построивъ углы B и C соотвѣтственно равные угламъ B′ и C′, получимъ искомый треугольникъ ABC (§ 95).



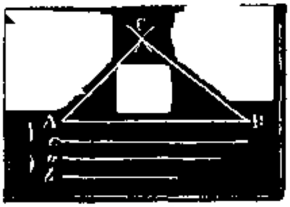
Фиг 108.

2) Если одинъ изъ угловъ B′ и C′ долженъ лежать *противъ* стороны a то, опредѣливъ третій уголъ треугольника (§ 175), приведемъ вопросъ къ предъидущему случаю

Примѣчаніе. Треугольникъ тогда только возможно построить когда сумма двухъ данныхъ угловъ B′ и C′ меньше двухъ прямыхъ

Вопросъ

§ 181. *Построить треугольникъ по тремъ его сторонамъ a, b и c*
На неопредѣленной прямой отложимъ AB, равную линіи c, изъ точки



Фиг. 109

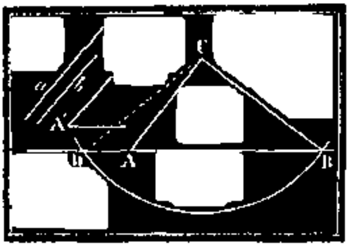
A какъ центра, радіусомъ, равнымъ сторонѣ b, опишемъ дугу; изъ точки B, какъ центра радіусомъ, равнымъ сторонѣ a, опишемъ дугу до пересѣченія съ первою дугою, и точку пересѣченія C соединимъ съ точками B и A получимъ искомый треугольникъ ABC

Примѣчаніе. Треугольникъ тогда только возможно построить, когда дуги пересѣкутся; поэтому разстояніе ихъ центровъ или бокъ c долженъ быть меньше суммы двухъ другихъ боковъ a и b и больше ихъ разности

Вопросъ

§ 182 *По двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ одной изъ нихъ, построить треугольникъ.*

1) Пусть даны стороны a и b, гдѣ $a>b$, и уголъ A', который долженъ лежать противъ *большей* стороны a



Фиг. 110.

Построимъ уголъ A равный A', и отложимъ $AC=b$; принявъ точку C за центръ, радіусомъ, равнымъ a опишемъ дугу, которая встрѣтитъ прямую AB въ двухъ точкахъ B и D, лежащихъ по разнымъ сторонамъ точки A —потому что, въ слѣдствіе условія, AC меньше BC Проведя прямыя CB и CD, получимъ два треугольника ABC и ACD, изъ нихъ первый удовлетворяетъ условіямъ, а во второмъ, стороны $AC=b$ и $CD=a$ суть данныя, но противъ большей изъ нихъ лежитъ не данный уголъ, а его дополненіе CAD.

2) Пусть $a<b$, а данный уголъ A' долженъ лежать противъ *меньшей* стороны a. Повторивъ построеніе, изложенное въ 1-мъ случаѣ, найдемъ, что дуга, описанная изъ центра C радіусомъ a пересѣчетъ прямую AB въ двухъ точкахъ B и D, по одну сторону точки A, потому что, въ слѣдствіе условія, AC больше радіуса a, и слѣд. точки пересѣченій должны быть ближе къ основанію перпендикуляра нежели

Фиг. 111

точка A, и получимъ два треугольника ACD и ABC, удовлетворяющіе условіямъ вопроса.

Примѣчаніе. Вопросъ будетъ возможенъ, если дуга, описанная изъ центра C, радіусомъ a, пересѣчетъ прямую AB; а для этого необходимо, чтобы a было больше разстоянія CF, точки C до прямой AB Такимъ образомъ, въ первомъ случаѣ вопросъ всегда возможенъ, потому что радіусъ a, будучи больше наклонной CA (фиг. 110) необходимо больше перпендикуляра, опущеннаго изъ C на AB

3) Пусть $a=b$ Построивъ уголъ A, равный данному углу A', отложимъ $AC=b$, а изъ точки C, какъ центра, опишемъ дугу радіусомъ a она необходимо пройдетъ чрезъ точку A, и такимъ образомъ получится треугольникъ ABC

Фиг. 112

Примѣчаніе Въ этомъ случаѣ вопросъ тогда только возможенъ, когда данный уголъ A' острый; потому что, при условіи $a=b$, два противулежащіе угла A и B равны между собою; а въ треугольникѣ не можетъ быть двухъ тупыхъ, а также двухъ прямыхъ угловъ

---

17 Провести окружность чрезъ три данныя точки, нележащія на одной прямой. — Данной окружности или данной дуги найти центръ. — Провести касательную къ окружности чрезъ точку кривой, чрезъ точку внѣшнюю и параллельно данной прямой.—Въ треугольникѣ вписать окружность.— На данномъ основаніи построить круговой сегментъ, вмѣщающій данный уголъ

Вопросъ

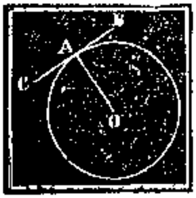
§ 183 *Провести окружность чрезъ три данныя точки, нележащія на одной прямой.*

Пусть A B и C означаютъ три данныя точки. Проведемъ двѣ прямыя AB и BC,—онѣ будутъ хордами искомой окружности; изъ серединъ этихъ прямыхъ возставимъ къ нимъ перпендикуляры DO и FO — каждый изъ нихъ пройдетъ чрезъ центръ (§ 139); поэтому точка пересѣченія O будетъ центромъ искомой окружности, а OA радіусомъ.

§ 184. Изъ предъидущаго рѣшенія видно: *чтобы найти центръ окружности или дуги* надобно провесть двѣ пересѣкающіяся хорды и изъ серединъ ихъ возставить перпендикуляры, точка пересѣченія этихъ перпендикуляровъ будетъ искомый центръ.

Вопросъ

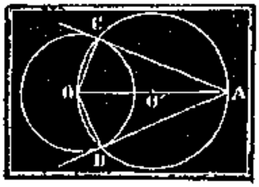
§ 185 *Провести касательную къ окружности.*



Фиг. 113

1) *Когда дана точка на окружности* Пусть A данная точка; соединимъ ее съ центромъ O и возставимъ перпендикуляръ BC изъ точки A къ радіусу AO; BC будетъ касательная (§§ 121 и 122).

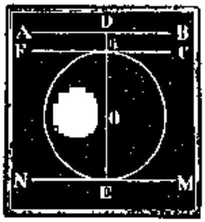
2) *Когда дана точка внѣ круга.* Пусть требуется провесть касательную къ окружности O чрезъ точку A Соединимъ центръ O съ точкою A; середину прямой AO примемъ за центръ, а половину ея за радіусъ. окружность, такимъ образомъ опи



Фиг. 114.

санная, пройдетъ чрезъ точки A и O, и пересѣчетъ данную окружность. Соединивъ данную точку A съ точками пересѣченія C и D, получимъ двѣ касательныя AC и AD. Въ самомъ дѣлѣ, углы ACO и ADO, какъ вписанные въ полуокружностяхъ, равны прямому углу (§ 149); значитъ прямая CA, проведенная перпендикулярно къ радіусу CO, касательна къ окружности (§ 122). Тоже должно сказать и о прямой DA.

3) *Когда касательная должна быть параллельна данной прямой* Пусть AB данная прямая, Изъ центра O опустимъ перпендикуляръ OD на прямую AB, а изъ точки пересѣченія



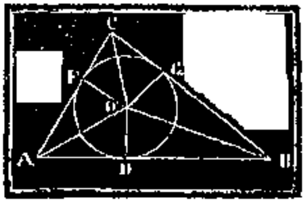
Фиг. 115.

G возстановимъ перпендикуляръ FC къ прямой DO этотъ перпендикуляръ будетъ касательною къ окружности (§ 122), и онъ параллеленъ AB, потому что двѣ прямыя AB и FC перпендикулярны къ третьей DO. Другое рѣшеніе доставитъ прямая MN, проведенная перпендикулярно къ діаметру GE чрезъ конецъ его E

Вопросъ.

§ 186 *Въ треугольникъ вписать окружность.*

Пусть ABC данный треугольникъ. Припомнимъ (§ 135), что вписать кругъ въ треугольникѣ значитъ найти такой кругъ, къ окружно сти котораго касались бы стороны треугольника Раздѣлимъ по поламъ два угла треугольника, напримѣръ углы A и B, изъ точки пересѣченія O опустимъ перпендикуляры OD, OF и OG на стороны треугольника, и докажемъ, что OD=OF=OG. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADO и AFO, при общей ипотенузѣ AO, острые углы равны между собою, DAO=FAO, слѣдовательно остальныя части равны, OD=OF,



Фиг. 116

AD=AF. Точно также изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ BDO и BGO, найдемъ, что OD=OG: значитъ OD=OF=OG. По этому, принявъ O за центръ, а OD за радіусъ, получимъ окружность которая пройдетъ чрезъ точки D, F и G а стороны AB, BC и AC будутъ въ ней касательныя въ точкахъ D, G и F (§ 122).

§ 187. Для рѣшенія вопроса, мы раздѣлили по-поламъ углы A и B, легко объяснить, что *прямая, дѣлящая по-поламъ третій уголъ C, пройдетъ чрезъ точку O пересѣченія двухъ первыхъ равно-дѣлящихъ*. Въ самомъ дѣлѣ, проведя прямую CO, найдемъ, что въ прямоугольныхъ треугольникахъ CFO и CGO, при общей ипотенузѣ CO катеты GO и FO равны; слѣдовательно и остальныя части равны, т. е.

уголъ FCO=углу GCO.

§ 188. Мы замѣтили (§ 186), что AD=AF. поэтому, *если окружность вписана въ уголъ, то бока угла, ограниченные точками касанія, равны между собою.*

Примѣчаніе. Подобно тому, какъ мы вписали окружность въ треугольникѣ можно провесть окружность, которая касалась бы къ какимъ нибудь тремъ прямымъ. Такъ, чтобы окружность касалась къ прямымъ AB, AC и BC' (фиг. 117), раздѣлимъ углы A и B по-поламъ, а изъ точки пересѣченія ихъ O опустимъ перпендикуляры OF, OD и OG на данныя прямыя. Изъ равенства треугольниковъ AOF и AOD, BDO и BGO, получимъ OF=OD=OG; слѣдовательно окружность, описанная изъ центра O радіусомъ OF, удовлетворитъ условіямъ вопроса.

Фиг. 117

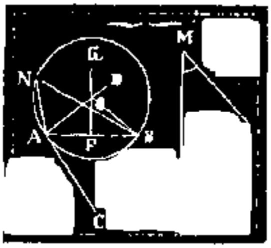
Если прямыя AC и BC' (фиг. 118) параллельны между собою, и требуется описать окружность, для которой прямыя AC, BC' и AB были бы касательными, то надобно поступить такъ точно, какъ мы поступили въ предъидущемъ случаѣ, доказательство будетъ такое же

Фиг. 118

Вопросъ

§ 189. *На данной прямой построить круговой сегментъ, вмѣщающій данный уголъ.*

Пусть AB означаетъ данную прямую, которая должна быть хордою круга,—причемъ одинъ изъ сегментовъ, отдѣляемыхъ этою хордою, долженъ содержать вписанные углы, равные напередъ данному углу M. При точкѣ A построимъ уголъ BAC, равный углу M изъ точки A возставимъ перпендикуляръ AD къ боку AC, изъ середины F хорды AB возставимъ къ ней перпендикуляръ FG; пересѣченіе O (§ 71) этихъ перпендикуляровъ примемъ за центръ и радіусомъ AO опишемъ окружность: она пройдетъ чрезъ точку B; потому что AO=BO (§ 58), и AC будетъ къ ней касательною въ точкѣ A (§ 122). Сегментъ ANB есть искомый, въ самомъ дѣлѣ, всякій вписанный въ немъ уголъ ANB равенъ половинѣ центральнаго угла AOB, соотвѣтствующаго дугѣ AB, уголъ BAC, образуемый касательною и хордою, составляетъ также половину того же центральнаго угла, слѣдовательно уголъ ANB=углу CAB а уголъ CAB=M, значитъ уголъ ANB=M



Фиг. 119

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ

О пропорціональности линій и подобіи прямолинейныхъ фигуръ

---

18 Понятіе объ измѣреніи величинъ. -Величины соизмѣримыя и несоизмѣримыя, нахожденіе общей мѣры двухъ количествъ.—Величины пропорціональныя прямо и обратно —Углы пропорціональны дугамъ, описаннымъ изъ вершинъ равными радіусами; измѣреніе угловъ

§ 100 *Измѣрить величину* значитъ узнать изъ сколькихъ *единицъ*, или частей единицы, она состоитъ. *Единицею* называется произвольная величина однородная съ тою величиною, которую надобно измѣрить *)

Въ томъ случаѣ, когда единица содержится въ данной величинѣ безъ остатка, данная величина составится изъ единицы, повторенной столько разъ, сколько она содержалась въ измѣряемой величинѣ, и измѣряемая величина изобразится цѣлымъ именованнымъ числомъ. Напримѣръ: если футъ содержится 5 разъ въ прямой линіи то эта прямая равна 5 футамъ; если прямой уголъ содержится въ другомъ углѣ 3 раза то послѣдній равенъ 3 прямымъ

Въ томъ случаѣ, когда единица не содержится ровно, безъ остатка, въ измѣряемой величинѣ—надо искать такую величину, которая содержалась бы безъ остатка какъ въ измѣряемой величинѣ, такъ и въ единицѣ, и слѣдовательно была бы *общею мѣрою* и для измѣряемой величины и для единицы. Такъ какъ въ этомъ случаѣ общая мѣра, или все равно, часть единицы, будетъ содержаться въ измѣряемой величинѣ цѣлое число разъ, то измѣряемая величина будетъ состоять изъ части единицы, повторенной нѣсколько разъ, и слѣдовательно выразится дробнымъ именованнымъ числомъ. Напр. если футъ не содержится въ измѣряемой прямой цѣлое число разъ, а содержится въ ней цѣлое число разъ четверть фута а именно 7 разъ, то общею мѣрою для измѣряемой прямой и единицы будетъ четверть фута, и прямая выразится дробнымъ именованнымъ числомъ $^7/_4$ фута.**) Въ дроби, полученной

---

*) См. мою Ариѳметику.

**) Дробное именованное число иногда можно замѣнить составнымъ именованнымъ числомъ.

при измѣреніи величины, *числитель будетъ показывать сколько разъ общая мѣра содержится въ измѣряемой величинѣ, а знаменатель—сколько разъ та же мѣра содержится въ единицѣ.*

Итакъ вопросъ объ измѣреніи величины приводится къ другому вопросу: *найти общую мѣру между двумя величинами,* изъ которыхъ одна принимается за единицу. Этимъ вопросомъ рѣшится и тотъ случай, когда измѣряемая величина выразится цѣлымъ числомъ: тогда общею мѣрою будетъ сама единица.

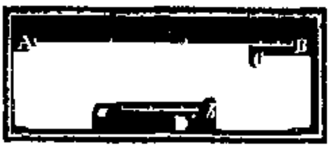
§ 191 Смотря по роду величинъ, способы или пріемы для отъискиванія общей мѣры между двумя величинами, бываютъ различны. Мы должны показать эти способы для всѣхъ протяженій т. е. для линій, поверхностей и объемовъ.

Замѣтимъ, что одна отъисканная общая мѣра двухъ величинъ влечетъ за собою множество такихъ мѣръ, потому что напримѣръ, $1/2$ или $1/3$ или $1/4$ и т. д этой общей мѣры также будутъ содержаться безъ остатка въ обѣихъ величинахъ. Поэтому мы будемъ отъискивать *общую наибольшую* мѣру

Вопросъ

§ 192 *Найти общую наибольшую мѣру между двумя прямыми* Пусть AB и ab означаютъ двѣ данныя прямыя.

Наложимъ меньшую линію ab на большую столько разъ, сколько возможно.



Фиг. 120

Пусть ab уложилась отъ A до C три раза съ остаткомъ CB, т. е

$$AB=3ab+CB \quad \ldots \quad (1);$$

пусть остатокъ CB укладывается въ ab два раза, съ остаткомъ Db, слѣдовательно

$$ab=2CB+Db \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

пусть остатокъ Db въ прежнемъ остаткѣ CB содержится ровно два раза безъ остатка. слѣдовательно

$$CB=2Db \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Прямая Db будетъ общею мѣрою данныхъ линій. И дѣйствительно: вставивъ во (2) равенство, вмѣсто CB, ему равное $2Db$, получимъ

$$ab=2\times 2Db+Db$$

$$ab=5Db$$

а изъ (1) равенства, при той же подстановкѣ вмѣсто ab и СВ имъ равныхъ получимъ

$$AB=3\times5Db+2Db,$$
$$AB=17Db.$$

Прямая Db есть *общая* мѣра для данныхъ прямыхъ АВ и ab: она въ первой содержится 17 разъ, а во второй 5 разъ, въ обоихъ случаяхъ безъ остатка. Докажемъ, что Db есть *наибольшая* мѣра.

Въ самомъ дѣлѣ: наибольшая мѣра должна содержаться безъ остатка въ данныхъ прямыхъ АВ и ab, слѣдовательно, по равенству (1), она должна содержаться безъ остатка и въ СВ*). Таже наибольшая мѣра содержится равно въ ab и СВ слѣдовательно, по (2) равенству, она заключается безъ остатка и въ Db. Поэтому общая наибольшая мѣра не можетъ быть больше Db; и какъ Db заключается ровно въ АВ и ab то Db есть общая наибольшая мѣра

Предъидущій способъ отыскиванія общей наибольшей мѣры сходенъ съ отыскиваніемъ общаго наибольшаго дѣлителя между двумя числами:

Меньшая линія накладывается на большую, остатокъ накладывается на меньшую линію, новый остатокъ накладывается на первый остатокъ и т. д.,—каждый остатокъ накладывается на предъидущій остатокъ; если одинъ изъ остатковъ уложится ровно въ предъидущемъ, то онъ и будетъ общею наибольшею мѣрою.

Слѣдуя этому правилу, отъискивается общая наибольшая мѣра между двумя дугами, описанными равными радіусами.

И такъ вопросъ объ измѣреніи прямой линіи конченъ: стоитъ только взять произвольную единицу, напримѣръ аршинъ, футъ, дюймъ найти общую наибольшую мѣру между данною прямою и избранною единицею, опредѣлить сколько разъ эта мѣра содержится въ данной линіи и сколько въ единицѣ, и наконецъ первое число принять за числитель, а второе за знаменатель (§ 190).

Тоже относится къ измѣренію дугъ, при чемъ за единицу принимается дуга, напримѣръ четверть окружности, написанная тѣмъ-же радіусомъ какимъ описана данная дуга.

§ 193. *Отношеніемъ* одной величины къ другой, однородной съ

---

*) См. мою Ариѳметику

нею, называется отвлеченное число, показывающее сколько разъ вторая величина содержится въ первой или какую часть первая величина со ставляетъ отъ второй

Отношеніе величины A къ величинѣ B изображается чрезъ $\frac{A}{B}$ или A B *обратное* отношеніе, именно отношеніе величины B къ A изображается чрезъ $\frac{B}{A}$ или чрезъ B . A.

Когда извѣстна общая мѣра двухъ величинъ, то отношеніе ихъ вы разится отношеніемъ чиселъ, показывающихъ сколько разъ общая мѣра содержится въ каждой изъ них. Въ самомъ дѣлѣ, если общую мѣру величинъ A и B назовемъ черезъ d и положимъ, что она въ первой величинѣ содержится m разъ а во второй n разъ то

$$A=md,\ B=nd,$$

а слѣд. отношеніе $\frac{A}{B}$ замѣнится отношеніемъ $\frac{md}{nd}$, которое равно $\frac{m}{n}$.

§ 194. Если общая мѣра d есть вмѣстѣ съ тѣмъ и наибольшая, то числа m и n необходимо взаимно-простыя. Дѣйствительно, допустивъ, что m и n имѣютъ общаго дѣлителя, напримѣръ 7, положимъ

$$m-7x,\ n=7y$$

слѣд (§ 193)

$$A=7d.\ x,\ B\ -7d\ y;$$

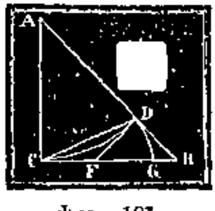
значитъ A и B имѣли бы общею мѣрою число $7d$, которое больше об щей наибольшей мѣры.

§ 195. Зная отношеніе величины къ другой, принимаемой за еди ницу, будемъ знать и мѣру первой величины, потому что будетъ извѣстно изъ сколькихъ единицъ или частей единицы состоитъ первая величина; поэтому *вопросъ объ измѣреніи величинъ приводится къ нахожденію отношенія измѣряемой величины къ единицѣ.*

§ 196. Величины, имѣющія общую мѣру, называются *соизмѣри мыми*, а неимѣющія ея—*несоизмѣримыми.*

§ 197. На практикѣ, отыскивая общую мѣру двухъ величинъ, всегда достигаемъ столь малыхъ остатковъ, которые не могутъ быть замѣтны, и такимъ образомъ будетъ казаться, что нѣтъ несоизмѣримыхъ линій, только теорія можетъ убѣдить насъ въ томъ, что дѣйствительно бываютъ несоизмѣримыя линіи. Докажемъ, что *ипотенуза равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника несоизмѣрима съ катетомъ того-же треугольника.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C—прямой и катетъ AC=BC, значитъ уголъ А=В и каждый равенъ половинѣ прямаго Къ ипотенузѣ АВ и катету АС примѣнимъ способъ отысканія общей наибольшой мѣры (192). Такъ какъ ипотенуза АВ больше катета АС ибо наклонная больше перпендикуляра (§ 52), то отложимъ АС по АВ, отъ точки А или что тоже, опишемъ дугу изъ точки А радіусомъ АС до пересѣченія ея съ ипотенузою АВ получимъ



Фиг. 121

$$AB=AC+BD \quad .\ .\ (1)$$

Замѣтимъ что BD меньше АС, въ самомъ дѣлѣ, проведя хорду CD получимъ уголъ BCD, составленный хордою CD и касательною BC (§ 123), онъ равенъ половинѣ центральнаго угла А слѣдоват: онъ равенъ $^1/_4$ прямаго; поэтому въ треугольникѣ BD, сумма угловъ $B+BCD=^3/_4$ прямаго и уголъ BDC тупой, значитъ онъ больше остраго угла BCD, и бокъ BD меньше бока BC=AC; и такъ *катетъ* АС *содержится въ ипотунузѣ* АВ *только одинъ разъ съ остаткомъ* BD

Чтобы продолжать способъ отыскиванія общей наиб: мѣры, надобно посмотрѣть сколько разъ BD содержится въ АС или въ BC (§ 192) Проведя чрезъ точку D перпендикуляръ DF къ ипотенузѣ АВ, вмѣстѣ съ тѣмъ отрѣжемъ CF=BD; ибо этотъ перпендикуляръ будетъ касательная къ окружности, значитъ въ углѣ CFD будетъ вписана окружность; слѣд на основаніи (§ 188), CF=DF; а эта послѣдняя равна BD, потому что въ прямоугольномъ треугольникѣ BDF, уголъ B равенъ половинѣ прямаго, слѣд: и F равенъ половинѣ прямаго, значитъ бока, лежащіе противъ равныхъ угловъ B и F, равны между собою; изъ всего сказаннаго заключаемъ, что CF=BD а

$$BC \text{ или } AC=BD+BF$$

Очевидно, что BF>BD (§ 52), слѣд: надобно еще узнать сколько разъ BD содержится въ BF; для этого замѣтимъ, что треугольникъ BDF прямоуголенъ и катеты его BD и DF равны значитъ катетъ BD въ ипотенузѣ BF содержится только одинъ разъ съ остаткомъ BG этотъ послѣдній получится, когда изъ точки F радіусомъ FD=BD опишемъ дугу. Слѣд: BF=BD+BG и

$$AC=2BD+BG.$$

Примѣняя къ прямоугольному треугольнику BDF, въ которомъ катетъ DF=DB и е сказанное о данномъ треугольникѣ ABC, найдемъ, что остатокъ BG содержится два раза въ катетѣ BD (въ первомъ остаткѣ), съ остаткомъ, и т. д. Отсюда видно, что способъ для отыскиванія общей наибольшей мѣры между ипотенузою и катетомъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника всегда приводитъ къ остатку, сколько-бы дѣйствіе ни продолжали; поэтому *ипотенуза и катетъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника несоизмѣримы*; или, что тоже, *діагональ и бокъ квадрата несоизмѣримы.*

§ 198. Когда двѣ величины соизмѣримы, тогда отношеніе ихъ, какъ уже замѣчено (190), выразится цѣлымъ или дробнымъ числомъ если-же величины несоизмѣримы (т. е. для нихъ нѣтъ общей мѣры) то отношеніе ихъ должно выразить по приближенію съ желаемою точностью.

Вопросъ.

§ 199. *Найти приближенное отношеніе двухъ прямыхъ линій*

Отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ линій можетъ быть найдено только приблизительно и вся сущность рѣшенія этого вопроса состоитъ въ томъ, чтобы найти приближеніе съ желаемою точностью

Пусть A и B означаютъ двѣ прямыя, и требуется найти отношеніе ихъ съ точностью до $\frac{1}{10}$ это значитъ, что истинное отношеніе A : B и приближеніе, которое мы ищемъ, должны разниться на число меньше $\frac{1}{10}$.

Вообразимъ, что прямая B раздѣлена на 10 равныхъ частей и положимъ, что, укладывая десятую часть B, т. е. $\frac{B}{10}$ по линіи A оказалось, что A содержитъ 23 части, но не содержитъ 24-хъ частей, т. е

$$A > 23 \times \frac{B}{10} \text{ и } A < 24 \times \frac{B}{10},$$

изъ этихъ неравенствъ получимъ

$$\frac{A}{B} > \frac{23}{10} \text{ и } \frac{A}{B} < \frac{24}{10};$$

слѣд. $\frac{A}{B}$ заключается между $\frac{23}{10}$ и $\frac{24}{10}$ которыя разнятся на $\frac{1}{10}$ поэтому отношенія $\frac{A}{B}$ и $\frac{23}{10}$ дадутъ разность которая будетъ меньше $\frac{1}{10}$, значитъ

$$\frac{A}{B} = \frac{23}{10} \text{ съ точностью до } \frac{1}{10}$$

Такимъ образомъ представляется всегда возможнымъ найти приближенное отношеніе между двумя прямыми Способъ этотъ мы основали на возможности дѣленія прямой на произвольное число равныхъ частей, а какъ намъ извѣстенъ пока способъ дѣленія прямой только на 2, на 4, на 8 и т. д. равныхъ частей, то предложимъ другой пріемъ для отъискиванія приближеннаго отношенія. Возьмемъ найденныя выше неравенства

$$A > 23 \times \frac{B}{10} \text{ и } A < 24 \times \frac{B}{10},$$

изъ нихъ получимъ

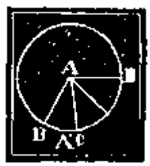
$$\frac{10A}{B} > 23, \frac{10A}{B} < 24$$

Отсюда заключаемъ *чтобы найти приближенное отношеніе* $\frac{A}{B}$ *съ точностью до* $\frac{1}{10}$ *надобно взять 10 разъ числитель* A *и посмотрѣть, сколько разъ знаменатель* B *содержится въ полученной линіи.*

Этимъ способомъ достигается на практикѣ бо́льшая точность противъ способа, изложеннаго выше, ибо избѣгаемъ дѣленія B на мелкія части а потому въ послѣдствіи и будемъ прибѣгать къ этому способу.

Приближенное отношеніе между дугами, описанными равными радіусами, находится точно также, какъ и приближенное отношеніе между прямыми.

§ 200. Разсматривая уголъ BAC и соотвѣтствующую ему дугу BC (фиг. 124), описанную изъ вершины произвольнымъ радіусомъ, замѣчаемъ между ними слѣдующую зависимость.



Фиг 124

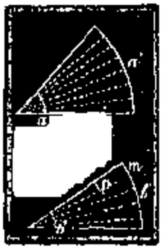
1) Съ увеличеніемъ дуги BC увеличивается центральный уголъ BAC, потому что большей дугѣ соотвѣтствуетъ и большій уголъ

2) Съ увеличеніемъ дуги BC въ нѣсколько разъ увеличивается во столько же разъ и соотвѣтствующій ей центральный уголъ BAC; въ самомъ дѣлѣ, если отложимъ отъ точки B дугу BC, напримѣръ три раза, то получимъ дугу BD большую дуги BC въ три раза, и этой дугѣ BD соотвѣтствуетъ уголъ BAD въ три раза большій угла BAC, потому что соединивъ точки дѣленія съ центромъ увидимъ что уголъ BAD состоитъ изъ трехъ угловъ, равныхъ углу BAC

Вслѣдствіе того, что съ увеличеніемъ дуги въ нѣсколько разъ увеличивается во столько же разъ и соотвѣтствующій ей центральный уголъ, должно заключить, что какому цѣлому числу равно отношеніе двухъ дугъ, то тому же цѣлому числу равно и отношеніе соотвѣтствующихъ имъ угловъ. Напримѣръ

$$\text{отношеніе } \frac{\text{дуги BD}}{\text{дугѣ BC}} = 3 \quad \text{и отношеніе } \frac{\text{угла BAD}}{\text{углу BAC}} = 3$$

Зная, что съ увеличеніемъ дуги въ нѣсколько разъ увеличивается во столько же разъ и соотвѣтствующій ей центральный уголъ, или, что все равно, зная, что какому цѣлому числу равно отношеніе дугъ, такому же цѣлому числу будетъ равно и отношеніе соотвѣтствующихъ имъ центральныхъ угловъ, докажемъ, что если отношеніе дугъ выразится не цѣлымъ числомъ, а дробнымъ или несоизмѣримымъ, то такимъ же точно числомъ выразится и отношеніе соотвѣтствующихъ имъ центральныхъ угловъ.



Фиг. 122

Беремъ произвольные углы a и b (фиг. 122), принимая вершины ихъ за центры, описываемъ дуги a' и b' произвольными, но равными радіусами, и докажемъ, что

отношеніе $a : b$ равно отношенію $a' : b'$,

тогда отношеніе a' къ b' выразится дробнымъ числомъ или несоизмѣримымъ

Для этого надобно на самомъ дѣлѣ найти то и другое отношеніе, и посмотрѣть равны ли они между собою. Въ этомъ не представится затрудненій, ибо намъ извѣстно, какъ ищется отношеніе между двумя дугами (§§ 192 и 199), точно или по приближенію, смотря по тому будутъ ли дуги соизмѣримы или не соизмѣримы.

1) Пусть дуги a и b' соизмѣримы и общая ихъ мѣра m (§ 192) содержится въ a', 7 разъ, а въ b, 5 разъ, слѣдовательно $a'=7m$, $b'=5$ m, отсюда *отношеніе дугъ*

$$\frac{a'}{b'} = \frac{7}{5},$$

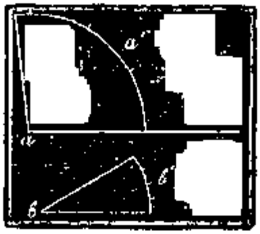
Каждой дугѣ m, содержащейся въ b', 5 разъ, а въ a', 7 соотвѣтствуетъ центральный уголъ p; вслѣдствіе равенства дугъ и центральные углы равны между собою, слѣд: уголъ a раздѣлится на 7 а b на 5 равныхъ частей, такъ что $a=7p$, $b=5\,p$, отсюда *отношеніе угловъ*

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$$

И такъ отношеніе угловъ равно отношенію дугъ г е a b a b'.

2) Пусть дуги a и b несоизмѣримы Отношеніе ихъ можетъ быть найдено только по приближенію, и мы должны доказать, что приближенія отношеній дугъ, съ одной стороны и угловъ, съ другой, всегда равны между собою, при всякой степени приближенія — въ этомъ со стоитъ понятіе о равенствѣ несоизмѣримыхъ отношеній.

И такъ положимъ, что требуется найти отношеніе между дугами съ точностью до $^1/_4$. Для этого дугу b' раздѣлимъ на 4 равныя части и найденную часть будемъ укладывать въ дугѣ a' и пусть дуга



Фиг 123

$$a > 17 \ \frac{b}{4} \text{ и } a < 18 \cdot \frac{b}{4},$$

отсюда $\frac{a}{b} > \frac{17}{4}$ и $\frac{a}{b} < \frac{18}{4}$,

слѣдоват. $\frac{a'}{b'} = \frac{17}{4}$ съ точностью до $^1/_4$

Каждой дугѣ $\frac{b}{4}$ соотвѣтствуетъ центральный уголъ и всѣ эти углы равны между собою, слѣдовательно можно сказать, что уголъ b раздѣленъ на 4 равныя части, и одну изъ этихъ частей укладывали въ углѣ a слѣдовательно

$$a > 17 \ \frac{b}{4} \text{ и } a < 18 \ \frac{b}{4},$$

отсюда $\frac{a}{b} > \frac{17}{4}$ и $\frac{a}{b} < \frac{18}{4}$

слѣдоват $\frac{a}{b} = \frac{17}{4}$ съ точностью до $^1/_4$

Значитъ приближеніе отношенія дугъ $\frac{a'}{b}$ всегда равно приближенію отношенія соотвѣтственныхъ угловъ, потому что, вмѣсто дѣленія дуги b на 4 равныя части можно дѣлить ее на какое угодно число И такъ

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b'}$$

какимъ бы числомъ ни выразилось одно изъ этихъ отношеній

Если зависимость, существующая между центральными углами и соотвѣтствующими имъ дугами будетъ имѣть мѣсто между какими нибудь двумя величинами A и A, то къ нимъ можно примѣнить все сейчасъ сказанное о центральныхъ углахъ и соотвѣтствующихъ имъ дугахъ въ чемъ убѣждаетъ насъ слѣдующее предложеніе

Предложеніе.

§ 201. *Если двѣ величины находятся въ такой зависимости, что во 1-хъ съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной изъ нихъ, другая тоже увеличивается или уменьшается и во 2-хъ съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной въ 2, 3, 4,... раза, другая увеличивается или уменьшается во столько же разъ, то отношеніе какихъ нибудь двухъ количествъ первой величины равно отношенію соотвѣтствующихъ имъ количествъ второй величины.*

Пусть A и A′ означаютъ двѣ величины, однородныя или разнородныя, которыя удовлетворяютъ условіямъ предложенія, именно съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ величины A въ 2, 3, 4.... раза увеличивается или уменьшается во столько же разъ и величина A′. Означимъ буквами a и b какія нибудь двѣ величины, принадлежащія A, а буквами a' и b' соотвѣтствующія имъ величины и принадлежащія роду величинъ A. Напримѣръ, если подъ A будемъ подразумѣвать углы, а подъ A′ дуги, отвѣчающія этимъ угламъ описанныя изъ ихъ вершинъ произвольными, но равными радіусами, то подъ a и b должно разумѣть какіе нибудь два угла, а подъ a' и b' двѣ дуги, отвѣчающія этимъ угламъ и описанныя изъ вершинъ равными радіусами; напримѣръ, можно подразумѣвать углы и дуги изображенныя на фиг. 123

Для ясности напишемъ величины одного рода A въ вертикальномъ столбцѣ и противъ нихъ соотвѣтственныя имъ величины рода A′

	A		A
величинѣ	a	соотвѣтствуетъ	a
»	b	»	b'

Надобно доказать что $a \,.\, b = a \;\; b'$

Для доказательства предложенія надо найти отношеніе a къ b, потомъ найти отношеніе a къ b' и если окажется, что найденныя отношенія равны между собою, то предложеніе справедливо. Намъ извѣстно, что отношеніе двухъ величинъ отыскивается точно, — когда величины соизмѣримы, или находятся только по приближенію, — когда эти величины несоизмѣримы, поэтому при доказательствѣ предложенія необходимо различать два случая.

1) Положимъ что a и b *соизмѣримы* и общая ихъ мѣра m содержится въ a, напримѣръ 7 разъ, а въ b 5 разъ; слѣдов $a=7m$, $b=5m$ и отсюда отношеніе

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{5}.$$

Чтобы найти отношеніе величинъ a' и b замѣтимъ, что отъ уменьшенія a въ 7 разъ, а b въ 5 разъ, вслѣдствіе втораго условія предложенія, соотвѣтственныя имъ величины a и b' уменьшатся: первая въ 7-мъ, а вторая въ 5 разъ, такъ что

величинѣ $\frac{a}{7}$ или m будетъ соотвѣтствовать $\frac{a}{7}$,

$\frac{b}{5}$ или m $\frac{b'}{5}$.

И такъ, одной и той же величинѣ m рода А соотвѣтствуютъ двѣ величины $\frac{a}{7}$ и $\frac{b'}{5}$ рода А', эти двѣ величины необходимо равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ одна была больше другой, то вышло бы, что съ увеличеніемъ величинъ рода А' остались бы безъ перемѣны величины рода А — что противно первому условію предложенія, значитъ

$$\frac{a}{7}=\frac{b'}{5} \quad \text{отсюда} \quad \frac{a'}{b}=\frac{7}{5}$$

И такъ каждое изъ отношеній $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b}$ порознь равно $^7/_5$ слѣдоват эти отношенія равны между собою, т. е. $a:b=a \quad b$

2) Пусть количества a и b несоизмѣримы

Найдемъ отношеніе величины a къ b по приближенію, напримѣръ съ точностью до 0,1 помощью способа, изложеннаго въ § 199

Повторимъ a десять разъ и положимъ, что b въ $10a$ содержится напримѣръ 17 разъ съ остаткомъ но 18 разъ не можетъ содержаться, значитъ

$$10a > 17b \text{ и } 10a < 18b, \quad \text{отсюда} \frac{a}{b}>\frac{17}{10} \text{ и } \frac{a}{b}<\frac{18}{10},$$

$$\text{слѣдовательно} \quad \frac{a}{b}=\frac{17}{10} \text{ съ точностью до } \frac{1}{10}$$

Чтобы найти отношеніе величины a къ b замѣтимъ, что съ увеличеніемъ a въ 10 разъ, а b въ 17 разъ, а потомъ въ 18 разъ, вслѣдствіе втораго условія предложенія a' увеличится въ 10 разъ b увеличится въ 17 разъ, а потомъ въ 18 разъ, такъ что величинѣ $10a$ будетъ соотвѣтствовать $10a$

" $17b$ " " $17b'$

" $18b$ " " $18b'$.

Мы уже замѣтили, что $10a$ больше $17b$ и $10a$ меньше $18b$ то вслѣдствіе перваго условія предложенія, получимъ

$$10a' > 17b' \text{ и } 10a' < 18b',$$

а отсюда

$$\frac{a'}{b} > \frac{17}{10} \text{ и } \frac{a}{b'} < \frac{18}{10},$$

поэтому

$$\frac{a}{b} = \frac{17}{10} \text{ съ точностью до } \frac{1}{10}.$$

И такъ каждое отношеніе $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ порознь выразилось однимъ и тѣмъ же числомъ съ точностью 0,1, точно также найдемъ, что отношенія $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ будутъ имѣть одинаковыя цифры въ сотыхъ, тысячныхъ и т. д. разрядахъ, слѣдов. эти отношенія равны между собою т. е. $a : b = a' : b'$

§ 202 *Если двѣ величины находятся въ такой зависимости, что съ измѣненіемъ одной измѣняется другая такимъ образомъ, что отношеніе какихъ нибудь двухъ количествъ, принадлежащихъ первой величинѣ, равно отношенію соотвѣтственныхъ имъ количествъ второй величины, то такія величины называются прямо пропорціональными или, проще, пропорціональными.*

Чтобы узнать существуетъ ли пропорціональность между двумя величинами, то, согласно сейчасъ приведенному опредѣленію, надо для какихъ нибудь двухъ количествъ a и b первой величины найти соотвѣтствующія имъ два количества a' и b' второй величины, и если окажется, что отношеніе $a : b$ равно отношенію $a' : b'$, т. е. если окажется, что пропорція $a : b = a' : b'$ справедлива то эти величины прямо пропорціональны между собою

Для открытія пропорціональности между величинами чаще всего служитъ предложеніе предъидущаго § именно: если съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной величины другая тоже увеличивается или уменьшается, и если съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной въ 2, 3, 4,..., раза, другая также увеличивается или уменьшается во столько-же разъ, то такія величины прямо пропорціональны между собою.

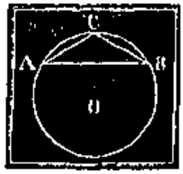
Предложеніе

§ 203. *Углы пропорціональны дугамъ, заключающимся между ихъ боками, описаннымъ изъ вершинъ равными радіусами.*

Предложеніе это доказано въ § 200, а также можно его разсматривать какъ слѣдствіе предложенія, изложеннаго въ § 201, ибо съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ дуги увеличивается или уменьшается центральный уголъ, притомъ, если дуга увеличится или уменьшится въ 2, 3, 4... раза, то во столько-же разъ увеличится или уменьшится и соотвѣтствующій ей центральный уголъ.

Примѣчаніе. Хотя съ увеличеніемъ дугъ увеличиваются и соотвѣтственныя имъ хорды (§ 143), но дуги *непропорціональны* хордамъ. И дѣйствительно, сравнивая дугу ACB съ ея половиною AC, имѣетъ отношеніе

$$\frac{\text{дуга ACB}}{\text{дугѣ AC}} = 2$$



Фиг. 125

Прямая AB короче ломаной ACB слѣд AB $<$ 2AC, отсюда отношеніе

$$\frac{\text{хорды AB}}{\text{хордѣ AC}} < 2$$

§ 203*. *Если двѣ величины находятся въ такой зависимости, что съ измѣненіемъ одной измѣняется другая такимъ образомъ, что отношеніе всякихъ двухъ количествъ первой величины равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ количествъ второй величины, то такія величины называются обратно пропорціональными*

Предложеніе

§ 204. *Двѣ величины обратно пропорціональны, если во 1-хъ съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной изъ нихъ, другая уменьшается или увеличивается и во 2-хъ, если съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной въ 2, 3, 4,... раза другая уменьшается или увеличивается во столько-же разъ.*

Ходъ доказательства тотъ-же, что при доказательствѣ предложенія о прямой пропорціональности (§ 201).

Пусть A и A′ означаютъ двѣ величины удовлетворяющія условіямъ предложенія и положимъ, что

$$\begin{array}{lcc} & \text{A} & \text{A} \\ \text{количеству} & a & \text{соотвѣтствуетъ} \quad a \\ \quad , & b & , \qquad b \end{array}$$

Извѣстно что обратное отношеніе для $\frac{a}{b}$ равно $\frac{b'}{a'}$ надо доказать что $\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}$

1) Положимъ, что a и b соизмѣримы и общая ихъ мѣра m содержится, напримѣръ 7 разъ въ a и 5 разъ въ b т. е. $a = 7m$ $b = 5m$, отсюда

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{5}.$$

Вслѣдствіе условія предложенія имѣемъ

$$\begin{array}{lll} \text{величинѣ } \frac{a}{7} \text{ или } m & \text{соотвѣтствуетъ} & 7a', \\ \quad , \quad \frac{b}{5} \text{ или } m & & 5b' \end{array}$$

Значитъ одному и тому-же количеству m первой величины A должны соотвѣтствовать равныя-же величины $7a'$ и $5b'$ ради величинъ A, т. е. $7a' = 5b'$, а отсюда

$$\frac{b'}{a'} = \frac{7}{5}$$

Итакъ

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}.$$

2) Пусть количества a и b несоизмѣримы Найдемъ отношеніе количества a къ b съ точностью напр. до 0,1 Для этого возьмемъ a десять разъ и положимъ, что

$$10a > 17b \text{ и } 10a < 18b,$$

отсюда

$$\frac{a}{b} > \frac{17}{10} \text{ и } \frac{a}{b} < \frac{18}{10},$$

значитъ

$$\frac{a}{b} = \frac{17}{10} \text{ съ точностью до } \frac{1}{10}.$$

Вслѣдствіе втораго условія предложенія имѣемъ

$$\begin{array}{lcc} \text{величинѣ} & 10a & \text{соотвѣтствуетъ} \quad \frac{a'}{10} \\ \quad ,, & 17b & , \qquad \frac{b'}{17} \\ \quad ,, & 18b & , \qquad \frac{b'}{18} \end{array}$$

А какъ, по условію $10a > 17b$ и $10a < 18b$, то

$$\frac{a'}{10} < \frac{b'}{17} \text{ и } \frac{a'}{10} > \frac{b'}{18}$$

изъ послѣднихъ двухъ неравенствъ получимъ

$$\frac{b'}{a'} > \frac{17}{10} \text{ и } \frac{b'}{a'} < \frac{18}{10}$$

значитъ

$$\frac{b'}{a'} = \frac{17}{10} \text{ съ точностью до } \frac{1}{10}$$

Точно также найдемъ что отношенія $\frac{a}{b}$ и $\frac{b'}{a'}$ будутъ имѣть одинаковое число сотыхъ, тысячныхъ и т. д. разрядовъ слѣд. эти отношенія равны между собою, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

Предложеніе

§ 205. *Центральный уголъ измѣряется дугою, заключенною между его боками.*

Измѣрить уголъ значитъ узнать изъ сколькихъ единицъ и частей единицы состоитъ данный уголъ, что достигается какъ извѣстно изъ § 195, отысканіемъ отношенія измѣряемаго угла къ единицѣ. Обыкновенно за единицу для измѣренія угловъ принимаютъ прямой уголъ D, величина котораго постоянна. Поэтому, чтобъ измѣрить какой нибудь уголъ A надо найти отношеніе угла A, къ углу D. Намъ извѣстно (§ 203), что отношеніе угловъ равно отношенію соотвѣтственныхъ имъ дугъ, описанныхъ изъ вершинъ равными радіусами; слѣдовательно назвавъ буквами a и d дуги соотвѣтствующія угламъ A и D, получимъ

$$\frac{A}{D} = \frac{a}{d},$$

значитъ измѣреніе угла A приводится къ нахожденію отношенія дуги a къ дугѣ d.

Отношеніе дуги a къ дугѣ d находится помощію наложенія (§§ 192, 199), а такъ какъ дуга d, соотвѣтствующая прямому углу, равна четверти окружности и можетъ быть принята за единицу дугъ, то, найдя отношеніе $\frac{a}{d}$, мы вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ число единицъ и частей единицы содержащихся въ дугѣ a, или все равно мѣру дуги a

И такъ мѣра угла A таже, что и дуги a

Въ этомъ смыслѣ принимается выраженіе: *уголъ измѣряется дугою.*

§ 206. Хотя въ употребленіи изложеннаго пріема и не представляется затрудненій, потому что было *показано*, какъ найти отношеніе между дугами окружностей, имѣющихъ равные радіусы, точное или по приближенію,—смотря по тому, будутъ ли дуги соизмѣримы или несоизмѣримы; но въ практикѣ никогда не прибѣгаютъ къ этому способу, а употребляютъ особый инструментъ—*транспортиръ*

Фиг. 127

Вообразимъ, что окружность круга, описаннаго произвольнымъ радіусомъ OA, раздѣлена на 360 равныхъ частей, каждая часть называется *градусомъ.* Если соединить всѣ точки дѣленія съ центромъ O, то получимъ 360 угловъ, каждый изъ нихъ именуется угломъ въ *одинъ градусъ.*

При равныхъ радіусахъ, и дуги въ одинъ градусъ будутъ неодинаковы, но уголъ въ одинъ градусъ остается постояннымъ. Дѣйствительно, если изъ центра O описать другую окружность радіусомъ OA и продолжить всѣ радіусы первой окружности, то новая окружность раздѣлится на 360 равныхъ частей или градусовъ, которые неравны порознь прежнимъ 360 дугамъ, углы же при центрѣ останутся безъ перемѣны, потому что величина угла не зависитъ отъ длины его боковъ. Поэтому, при опредѣленіи числа градусовъ, содержащихся въ углѣ, можно опредѣлять ихъ по дугѣ, описанной произвольнымъ радіусомъ и заключающейся между его сторонами

Транспортиръ есть мѣдный или роговой полукругъ, раздѣленный на 180 градусовъ; слѣдовательно въ его окружности будетъ 360 градусовъ. Градусы дѣлятся еще каждый на четыре равныя части а чаще—только по-поламъ.

Приставивъ транспортиръ къ данному углу такъ, чтобы его діаметръ совпалъ съ бокомъ, а центръ пришелся въ вершинѣ, замѣчаютъ на транспортирѣ дѣленіе, чрезъ которое проходитъ другой бокъ угла: число градусовъ между боками и покажетъ число градусовъ угла.

Число градусовъ угла опредѣляетъ его величину. Пусть, напримѣръ въ углѣ A, 15 градусовъ, слѣдовательно и въ соотвѣтствующей ему дугѣ также 15 градусовъ, а въ четверти окружности 90 градусовъ Поэтому отношеніе угла A къ прямому D, будетъ

$$\frac{A}{D}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

потому что углы пропорціональны дугамъ и такимъ образомъ уголъ A составляетъ $\frac{1}{6}$ прямаго

Градусы принято дѣлить на 60 равныхъ частей, называемыхъ *минутами*; а минуты—на 60 равныхъ частей называемыхъ *секундами*, секунды подраздѣляются на десятыя, сотыя и т. д. части.

Если уголъ $A=12°15'$ (т. е. 12 градусамъ 15 минутамъ) то

$$\frac{A}{D}=\frac{12°15'}{90°} \text{ или } \frac{735}{5400};$$

слѣдовательно $\frac{A}{D}=0,13$—приблизительно

§ 207. Когда уголъ начерченъ такимъ образомъ, что его бока составляютъ хорды, или касательныя, или сѣкущія окружности, то для измѣренія такого угла нѣтъ надобности описывать между его боками дуги, какъ объяснено въ § 205 а можно воспользоваться уже данною окружностью. Разсмотримъ всѣ случаи.

1) *Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключающейся между его боками;* потому что онъ составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго этой дугѣ (§ 147) а центральный уголъ измѣряется соотвѣтствующею ему дугою (§ 205)

2) *Уголъ составленный хордою и касательною, проведенною чрезъ конецъ этой хорды, измѣряется половиною заключающейся въ немъ дуги;* потому что онъ составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго этой дугѣ (§ 150).

3) *Уголъ, котораго вершина внутри круга измѣряется полусуммою дугъ, заключающихся между боками угла и ихъ продолженіемъ;* потому что онъ равенъ полусуммѣ центральныхъ угловъ соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между боками угла и ихъ продолженіями (§ 151).

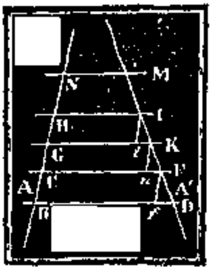
4) *Уголъ, котораго вершина внѣ круга, измѣряется полуразностью дугъ, заключающихся между его боками;* потому что онъ равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между его боками (§ 152)

19. Параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ двухъ линій, какъ ни есть проведенныхъ, пропорціональныя части Хорда треугольника, проведенная параллельно одному изъ боковъ, раздѣляетъ двѣ прочія стороны на части пропорціональныя — Обратное предложеніе. - Линіи, проведенныя изъ одной точки, раздѣляются параллельными прямыми на пропорціональныя части, а сами дѣлятъ параллельныя линіи на части, составляющія пропорцію.—Обратное предложеніе

Предложеніе

§ 208. *Двѣ прямыя разсѣкаются тремя параллельными на части пропорціональныя.*

Пусть BN и DM — прямыя, разсѣчемъ ихъ двумя параллельными BD и CF; здѣсь разсматриваются двѣ величины: отрѣзокъ на одной прямой и соотвѣтствующій ему отрѣзокъ на другой между этими отрѣзками замѣчаемъ слѣдующую зависимость, если только эти отрѣзки заключаются между параллельными линіями. Во 1-хъ, съ увеличеніемъ BC или A, увеличивается соотвѣтствующій отрѣзокъ DI или A Во 2-хъ, если увеличимъ отрѣзокъ A напримѣръ, въ три раза, то и соотвѣтствующій ему отрѣзокъ DF увеличится также въ три раза. Въ самомъ дѣлѣ, отложимъ длину A отъ точки B, напримѣръ, три раза BC=CG=GH, и чрезъ точки дѣленія проведемъ прямыя параллельныя BD,—получимъ на DM три отрѣзка. Чтобы доказать ихъ равенство. проведемъ Ii, Kn и Ff параллельно BN; въ треугольникахъ KIi, KnF и FDf стороны Ii, Kn, Ff равны между собою, ибо Ii = HG, Kn = CG, Ff=CB, какъ параллельныя между параллельными; но по условію HG=CG=CB, слѣдовательно упомянутыя стороны равны между собою; углы этихъ треугольниковъ также равны, какъ соотвѣтственные; а равенство этихъ частей влечетъ равенство остальныхъ сходственныхъ частей треугольниковъ, — слѣдовательно I =KF=FD.



Фиг. 128.

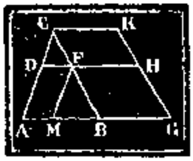
И такъ отрѣзки одной прямой BN пропорціональны отрѣзкамъ другой линіи DM (§ 202), такъ что если проведемъ какъ нибудь три параллельныя MN, CF и BD, то получимъ:

$$BC: CN=DF: FM,$$
$$BC: BN=DF: DM$$

Предложенie

§ 20). *Хорда треугольника, проведенная параллельно одному изъ боковъ, раздѣляетъ два прочie бока на части пропорцiональныя.*

Въ треугольникѣ ABC проведемъ хорду DF параллельно боку AB тогда на бокѣ AC получимъ два отрѣзка AD и CD, которымъ будутъ соотвѣтствовать на бокѣ BC отрѣзки BF и CF надобно доказать что AD: CD=BF: CF.



Фиг 129

Чрезъ вершину C проведемъ прямую CK параллельно боку AB, а чрезъ какую нибудь точку G, взятую на продолженiи AB, проведемъ GK параллельно боку BC такимъ образомъ получимъ двѣ прямыя AC и KG, разсѣченныя тремя параллельными AG, DH и CK; вслѣдствie предъидущаго предложенiя имѣемъ

$$AD: CD=GH: KH$$

$$AC. CD=GK: KH,\ AC. AD=GK. GH$$

Но GH = BF, KH = CF, GK=BC, какъ части параллельныхъ, заключающихся между параллельными; слѣдовательно, подставляя въ предъидущiя пропорцiи, вмѣсто GH, KH и GK имъ равныя, получимъ

$$AD: CD=BF: CF....(1)$$

$$AC: CD=BC. CF....(2),$$

$$AC: AD=BC: BF....(3)$$

Пропорцiи (2) и (3) показываютъ, что *хорда треугольника параллельная одному изъ боковъ, отдѣляетъ отрѣзки отъ другихъ боковъ пропорцiональные этимъ бокамъ*

§ 210. *Слѣдствie.* Проведя FM параллельно боку AC треугольника ABC на основанiи предъидущаго предложенiя получимъ

$$BC : CF=AB : AM\cdot$$

но AM=DF, слѣд $\quad BC : CF=AB : DF.$

Сравнивая эту пропорцiю со (2) пропорцiею предъидущаго параграфа получимъ

$$\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{CF}=\frac{AB}{DF}.$$

Предъидущie члены этихъ отношенiй суть стороны треугольника ABC, а послѣдующie члены—стороны треугольника CDF отрѣзаннаго хордою DF параллельною боку AB Поэтому

Хорда, параллельная боку треугольника, отрѣзываетъ треугольникъ, котораго стороны пропорціональны сторонамъ перваго треугольника; причемъ пропорціональныя стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ.

Предложеніе.

§ 211. *Обратно: хорда треугольника, раздѣляющая два бока на части пропорціональныя, параллельна третьему боку.*

Пусть $AC:CD=BC:CF$, докажемъ, что DF параллельна AB.

Фиг. 130.

Чрезъ точку D проведемъ DG параллельно AB; вслѣдствіе предъидущаго предложенія (§ 209), получимъ $AC:CD=BC:CG$.

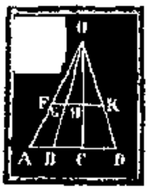
Сравнивая члены этой пропорціи съ членами данной, найдемъ, что $CG=CF$; поэтому точка G должна совпасть съ F, и прямая DG, параллельная AB совпадетъ съ DF: значитъ хорда DF параллельна боку AB.

Предложеніе.

§ 212. *Прямыя линіи, проведенныя изъ одной точки, раздѣляются параллельными прямыми на пропорціональныя части, и сами дѣлятъ параллельныя линіи на части, составляющія пропорцію.*

Положимъ что FK параллельна AD докажемъ

$$1)\ \frac{AF}{FO}=\frac{BG}{GO}=\frac{CH}{HO}=\frac{DK}{KO}.$$



Фиг. 131

Хорда FG треугольника ABO параллельна боку AB, слѣдовательно

$$\frac{AF}{FO}=\frac{BG}{GO}. \qquad (1)$$

Хорда GH треугольника BCO параллельна боку BC слѣдовательно

$$\frac{BG}{GO}=\frac{CH}{HO}. \qquad (2)$$

Хорда HK треугольника CDO параллельна боку CD, слѣдовательно

$$\frac{CH}{HO}=\frac{DK}{KO}. \qquad (3).$$

Въ каждыхъ двухъ изъ этихъ трехъ пропорцій есть по общему отношенію: слѣдовательно всѣ отношенія равны между собою, и

$$\frac{AF}{FO}=\frac{BG}{GO}=\frac{CH}{HO}=\frac{DK}{KO}.$$

2) Докажемъ что

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HK}.$$

Хорда FG треугольника ABO, параллельная боку AB, отрѣзываетъ треугольникъ FGO, котораго бока пропорціональны сторонамъ треугольника ABO; слѣд.

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BO}{GO}.$$

По той же причинѣ изъ треугольниковъ BCO и GHO получимъ

$$\frac{BC}{GH}=\frac{CO}{HO},$$

изъ треугольниковъ CDO и HKO

$$\frac{CD}{HK}=\frac{CO}{HO}.$$

Вторыя отношенія этихъ трехъ пропорцій равны между собою (§ 210) слѣдовательно

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HK}$$

Предложеніе.

§ 213. *Обратно: прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки, дѣлящія параллельныя линіи на части пропорціональныя, пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Пусть FK параллельна AD, и

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{HG}=\frac{CD}{HK}$$

Положимъ, что прямыя AF и BG пересѣкаются въ точкѣ O; требуется доказать что прямыя HC и DK пройдутъ чрезъ точку O. Чрезъ точки O и H проведемъ прямую, и положимъ, что она пересѣчетъ AD въ точкѣ M; на основаніи предъидущаго предложенія, получимъ

Фиг. 13

$$AB : FG = BM : GH,$$

а по условію

$$AB : FG = BC : GH.$$

Въ этихъ двухъ пропорціяхъ три члена одной равны тремъ членамъ другой, слѣдовательно и четвертые члены равны, т. е. BM = BC; поэтому прямая OH пройдетъ чрезъ точку C. Точно также докажется что прямая OK пройдетъ чрезъ точку D; слѣдовательно всѣ прямыя AF, BG, CH и DK пересѣкаются въ одной точкѣ O.

— —

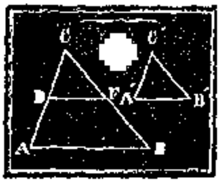
20 Подоб е треугольниковъ; сличеніе ихт подобія ст ихт равенствомъ

§ 214. Мы видѣли (§ 210), что хорда, параллельная одному изъ боковъ треугольника, отсѣкаетъ другой треугольникъ, котораго стороны пропорціональны сторонамъ перваго треугольника, и углы одного равны угламъ другаго· такіе треугольники называются *подобными*. Слѣдовательно для всякаго треугольника можно получить сколько угодно подобныхъ ему треугольниковъ, —стоитъ только проводить хорды, которыхъ множество, параллельно какому-нибудь его боку, до пересѣченія съ другими боками или ихъ продолженіями. И такъ,

Два треугольника называются подобными если углы одного равны порознь угламъ другаго и сходственныя стороны пропорціональны

Предложеніе

§ 215. *Два треугольника подобны, когда углы одного изъ нихъ равны порознь угламъ другаго.*



Фиг 133

Пусть углы A, B C соотвѣтственно равны угламъ A', B', C'; надобно доказать (§ 214), что стороны этихъ треугольниковъ пропорціональны. Отложимъ CD=C'A', и проведемъ DF параллельно боку AB, получимъ (§ 210)

$$\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{CF}=\frac{AB}{DF}.$$

Въ треугольникахъ CDF и A'B'C' стороны CD и C'A' равны между собою и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ равны порознь. Дѣйствительно, C=C' по условію; уголъ D равенъ своему соотвѣтственному A, при параллельныхъ DF и AB и сѣкущей AC; а уголъ A=A' по условію, слѣдовательно уголъ D=A' Равенство упомянутыхъ частей влечетъ равенство сходственныхъ сторонъ: CF=C'B', DF=A'B' Подставляя въ предъидущую пропорцію, вмѣсто CD CF и DF, имъ равныя, получимъ

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

И такъ въ треугольникахъ ABC и A'B'C' углы равны и сходственныя стороны пропорціональны слѣдовательно треугольники подобны

Предложение

§ 216. *Обратно: два треугольника подобны, если стороны одного пропорціональны сторонамъ другаго* (фиг. 133).

Пусть $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\quad . \qquad (1)$$

Надобно доказать, что уголъ $A=A'$ $B=B$, $C=C'$.

Отложимъ $CD=A'C'$ и проведемъ DF параллельно AB получимъ (§ 210)

$$\frac{AB}{DF}=\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{CF}\quad . \qquad (2).$$

Раздѣливъ отношенія (1) на соотвѣтствующія имъ отношенія (2), получимъ

$$\frac{DF}{A'B'}=\frac{CD}{A'C'}=\frac{CF}{B'C'}\cdot$$

Но $CD=A\,C$ слѣдовательно отношеніе $\frac{CD}{A'C'}=1$ значитъ $\frac{FD}{A'B'}=1$ и $\frac{CF}{B'C}=1$; отсюда $DF=A'B$, $CF=B'C'$.

И такъ, стороны треугольника DCF равны порознь сторонамъ треугольника $A'B'C'$; поэтому уголъ $D=A'$. Но уголъ $D=A$ (§ 63), слѣдовательно $A=A'$. Изъ тѣхъ-же треугольниковъ имѣемъ $C=C$; а равенство двухъ угловъ въ двухъ треугольникахъ влечетъ равенство третьихъ угловъ: $B=B$. Впрочемъ равенство этихъ послѣднихъ угловъ можно доказать точно такимъ образомъ, какъ сейчасъ было доказано равенство угловъ $A=A'$.

Предложеніе

§ 217 *Два треугольника подобны, если двѣ стороны одного пропорціональны двумъ сторонамъ другаго, а углы между этими сторонами равны между собою* (фиг, 133).

Пусть уголъ $C=C$

и $AC\colon A'C'=BC\colon B'C'$;

докажемъ, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны

Отложивъ $CD=A'C'$ и проведя DF параллельно боку AB получимъ $AC\cdot CD\quad BC:CF$

Сравнивая эту пропорцію съ данною, найдемъ, что $CF=B'C$, потому что три члена одной пропорціи равны тремъ членамъ другой Поэтому, въ треугольникахъ CDF и A'B'C двѣ стороны CD и CF равны сторонамъ A'C' и B'C' и углы между ними C и C' равны; слѣдовательно остальныя части треугольниковъ также равны, именно: уголъ D=A'. Но углы D и A также равны, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ AB и DF и сѣкущей AC, слѣдовательно уголъ A=A' а вслѣдствіе равенства двухъ угловъ A=A' C=C', и третіи углы B и B' равны. Итакъ треугольники ABC и A'B'C' подобны (§ 215)

Предложеніе

§ 218. *Два треугольника подобны, когда стороны ихъ взаимно параллельны, или когда онѣ взаимно перпендикулярны.*

И дѣйствительно, намъ извѣстно (§ 96 и § 97), что треугольники равноугольны, когда ихъ стороны параллельны или перпендикулярны а равноугольные треугольники подобны (§ 215).

Замѣтимъ при этомъ, что сходственными сторонами будутъ тѣ, которыя взаимно параллельны или взаимно перпендикулярны потому что эти стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ.

Поэтому, если A, B и C означаютъ стороны одного треугольника, a, b и c—стороны другаго, притомъ, если A параллельна или перпендикулярна a, B параллельна или перпендикулярна B, C параллельна или перпендикулярна c, то имѣемъ.

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}.$$

§ 219. Сравнивая предложенія о равенствѣ треугольниковъ съ предложеніями, относящимися къ ихъ подобію, найдемъ, что, замѣняя въ первыхъ слово *равны*. относящееся къ сторонамъ, *пропорціональныя*, получимъ предложенія о подобіи треугольниковъ. Исключеніе составляетъ тотъ случай, когда въ треугольникахъ есть только по одной равной сторонѣ: тутъ замѣны *равенства пропорціональностію* не можетъ быть потому, что двѣ величины т. е. двѣ стороны, одна одного, а другая другаго треугольника, не состовляютъ пропорціи. Поэтому, помня признаки равенства треугольниковъ, будемъ знать и признаки ихъ подобія: остается только запомнить, что равноугольные треугольники подобны

Предложеніе

§ 220. *Въ подобныхъ треугольникахъ, сходственныя основанія пропорціональны высотамъ.*

Пусть треугольники ABC и A B C′ подобны и уголъ A=A , B=B слѣд. AC и A′C′ будутъ сходственные бока; примемъ ихъ за основанія и проведемъ высоты BD и B′D′. Треугольники ABD и A′B′D′ подобны, ибо прямой уголъ ADB=A′D′B′ а по условію, уголъ A=A′; слѣд:

Фиг. 134

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'};$$

а въ слѣдствіе подобія данныхъ треугольниковъ имѣемъ

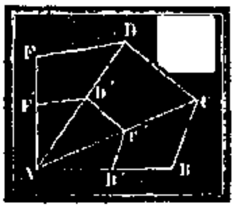
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'};$$

изъ этихъ двухъ пропорцій, по причинѣ общаго у нихъ отношенія, получимъ

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BD}{B'D'}.$$

21 Подобные полигоны.—Разложеніе ихъ на подобные треугольники.— Периметры подобныхъ полигоновъ относятся какъ сходственные бока.

§ 221 Возьмемъ какой нибудь многоугольникъ ABCDF; проведемъ діагонали изъ вершины A во всѣ прочія вершины. Проведемъ хорду B′C′ параллельно боку BC треугольника ABC· чрезъ C′ проведемъ хорду C′D′ параллельно CD, наконецъ чрезъ D′—хорду D′F′ параллельно боку DF треугольника ADF: такимъ образомъ получимъ многоугольникъ AB′C′D′F′, котораго *углы равны угламъ перваго многоугольника* (§§ 63 и 70). Легко убѣдиться, что стороны этихъ многоугольниковъ пропорціональны.



Фиг 135

Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ ABC и AB′C′ (§ 215)

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{AC'}{AC}. \qquad (1)$$

Изъ подобія треугольниковъ ACD и AC′D′

$$\frac{AC'}{CA}=\frac{D'C'}{DC}=\frac{AD'}{AD}. \qquad (2)$$

Изъ подобія треугольниковъ ADF и AD′F′

$$\frac{AD'}{AD}=\frac{D'F'}{DF}=\frac{AF'}{AF}. \qquad (3)$$

Въ равенствахъ (1), (2) и (3) есть общія отношенія, слѣдовательно

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{D'C'}{DC}=\frac{D'F'}{DF}=\frac{AF'}{AF},$$

т. е. *стороны одного многоугольника пропорціональны сторонамъ другаго многоугольника.*

При этомъ замѣтимъ, что пропорціональныя стороны соединяютъ вершины равныхъ угловъ, и называются *сходственными.* Такъ C'D' и CD сходственныя стороны, онѣ стягиваютъ вершины равныхъ угловъ: CDF=C'D'F', DCB=D'C'B'.

Понятіе, изложенное здѣсь о сходственныхъ сторонахъ многоугольниковъ примѣняется и къ треугольникамъ: и дѣйствительно, въ треугольникахъ мы назвали (§ 88) сходственными сторонами тѣ которыя лежатъ противъ равныхъ угловъ; но онѣ также соединяютъ вершины равныхъ угловъ, потому что въ подобныхъ треугольникахъ всѣ углы одного треугольника равны всѣмъ угламъ другаго.

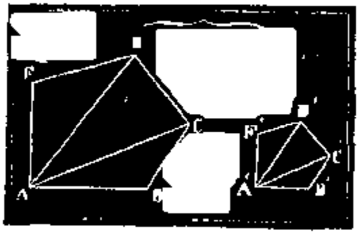
§ 222. *Два многоугольника называются подобными, если углы одного равны порознь угламъ другаго и сходственныя стороны пропорціональны.*

По этому опредѣленію *квадраты подобны между собою:* потому что углы одного равны угламъ другаго, какъ прямые; а стороны ихъ пропорціональны, въ слѣдствіе равенства ихъ въ каждомъ квадратѣ.

Предложеніе

§ 223. *Два многоугольника подобны, если діагонали, проведенныя изъ одной вершины въ каждомъ, во всѣ прочія, дѣлятъ ихъ на треугольники подобные и одинаково расположенные.*

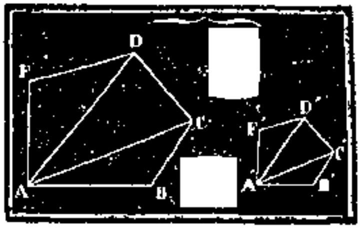
Пусть діагонали проведенныя изъ вершинъ A и A' многоугольниковъ ABCDF и A B'C'D'F' даютъ подобные треугольники ABC и A'B'C', ACD и A'C'D', ADF и A'D'F', одинаково ихъ расположеніе видно изъ чертежа. Докажемъ, что многоугольники ABCDF и A'B'C'D'F' подобны.



Фиг. 136

1) Углы этихъ многоугольниковъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, уголъ A состоитъ изъ угловъ BAC

CAD, DAF, которые порознь и соотвѣтственно равны угламъ B'A C', C'A'D', D'A'F' составляющимъ уголъ A', потому что треугольники ABC, ACD ADF подобны треугольникамъ A B C, A CD', A'D'F' и одинаково съ ними расположены а въ подобныхъ треугольникахъ углы соотвѣтственно равны.



Фиг. 136

2) Сходственныя стороны пропорціональны

Изъ подобія треугольковъ ABC и A'B C' имѣемъ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

Изъ подобія треугольниковъ ACD и A'C'D'

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'};$$

изъ подобія треугольниковъ ADF и A D F':

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{AF}{A'F'}.$$

Въ этихъ равенствахъ есть общія отношенія, поэтому всѣ отношенія равны между собою, и

$$\frac{AB}{A'B'}\ \frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{CD}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{AF}{AF'}.$$

И такъ многоугольники подобны (§ 222)

§ 224. *Примѣчаніе.* Всегда бываютъ подобны: 1) ромбы, въ которыхъ есть по одному равному углу, 2) прямоугольники, въ которыхъ двѣ смежныя стороны пропорціональны, 3) параллелограммы, въ которыхъ есть по равному углу между пропорціональными сторонами;— квадраты же всегда подобны.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ многоугольники разбиваются на подобные и одинаково расположенные треугольники.

Предложеніе.

225. *Обратно. два подобные многоугольника діагоналями, проведенными изъ вершинъ равныхъ угловъ, разбиваются на треугольники подобные и одинаково расположенные.*

Пусть многоугольникъ ABCDF подобенъ A'B'C'D'F' и уголъ BAF=B'A'F'; докажемъ, что треугольники ABC и A B'C' ACD и A'C'D, AFD и A'F'D' подобны.

Треугольники ABC и A B′C′ подобны потому, что стороны AB и BC пропорціональны A′B′ и B C′, какъ сходственные бока подобныхъ многоугольниковъ, и углы B и B′ между этими сторонами равны, какъ углы тѣхъ же многоугольниковъ (§ 217).

Чтобы доказать подобіе и одинаковаго расположенія треугольниковъ ACD и A′C′D′, объяснимъ сперва, что уголъ ACD=A C′D. Дѣйствительно:

уголъ BCD=B C D по условію,

и BCA = B′C A′ изъ подобія треугольниковъ ABC и A B C

слѣд: BCD−BCA=B′C′D′−B′C′A′,

или уголъ ACD=A′C′D′

Изъ подобія многоугольниковъ имѣемъ также

$$BC{:}B\,C'=CD{:}C'D',$$

а изъ подобія треугольниковъ ABC и A′B′C′,

$$BC{:}B'C'=AC{:}A'C'\cdot$$

слѣд: $$CD{:}C\,D'=AC{:}A'C',$$

и треугольники ACD и A′C D, имѣя равные углы ACD и A C D между пропорціональными сторонами—подобны.

Также докажется подобіе остальныхъ треугольниковъ, сколько бы ихъ ни было; впрочемъ подобіе послѣднихъ треугольниковъ ADF и A′D′F′ можно доказать и тѣмъ способомъ, какимъ было доказано подобіе первыхъ треугольниковъ ABC и A′B′C′.

Предложеніе

§ 221. *Периметры подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны сходственнымъ бокамъ.*

Пусть многоугольники ABCDF и A B C D F подобны; слѣдовательно стороны ихъ пропорціональны,

$$\frac{AB}{A\,B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C\,D'}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{AF}{A'F'}.$$

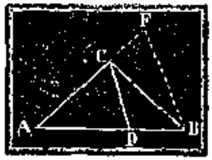
Въ ряду равныхъ отношеній сумма предъидущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предъидущихъ къ своему послѣдующему; сумма предъидущихъ составитъ периметръ многоугольника, ABCDF, а сумма послѣдующихъ — периметръ другаго многоугольника, каждый же изъ предъидущихъ съ своимъ послѣдующимъ составляютъ сходственныя стороны многоугольниковъ слѣдовательно предложеніе доказано

22 Прямая, дѣлящая по-поламъ уголъ треугольника, раздѣляетъ противу-лежащій бокъ на части пропорціональныя двумъ другимъ бокамъ — Обратное предложеніе.—Свойство перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямаго угла на гипотенузу —Примѣненіе этаго свойства къ кругу

Предложеніе.

§ 227. *Прямая, дѣлящая по-поламъ уголъ треугольника, раздѣляетъ противулежащій бокъ на части, пропорціональныя другимъ бокамъ*

Пусть CD дѣлитъ пополамъ уголъ ACB треугольника ABC докажемъ, что AD.DB AC:BC



Фиг 137

Чрезъ точку B проведемъ BI параллельно CD до пересѣченія съ продолженной AC. Въ треугольникѣ ABF хорда CD параллельна боку BF; слѣдовательно AD·DB=AC.CF

Въ слѣдствіе параллельности линій CD и BF при сѣкущей AI, соотвѣтственные углы равны, слѣд: уголъ

$$F=ACD$$

при тѣхъ же параллельныхъ и сѣкущей BC внутренние противоположные углы равны слѣд: уголъ

$$FBC=BCD.$$

По условію углы ACD и BCD равны между собою, слѣдовательно уголъ F=FBC, и стороны, противулежащія этимъ угламъ въ треугольникѣ BCF также равны, т е CF—BC. Подставивъ въ предъидущую пропорцію, вмѣсто CF, ей равное, получимъ

$$AD\ DB=AC\ BC$$

Предложеніе

§ 228. Обратно: *прямая разоѣлитъ уголъ треугольника по-поламъ, если она раздѣляетъ противулежащій бокъ на части, пропорціональныя остальнымъ бокамъ.* (фиг. 137).

Пусть AD.DB=AC·BC;

докажемъ, что уголъ ACD=BCD. Проведемъ BF параллельно CD,— получимъ (§ 209).. AD.DB=AC:CF.

Изъ сравненій этой пропорціи съ данною, заключаемъ, что BC=CF слѣдовательно въ треугольникѣ BCF (§ 83)

уголъ F=CBF; (1)

а въ слѣдствіе параллельности CD и BF имѣемъ· уголъ F=ACD, какъ соотвѣтственные, уголъ CBF=BCD, какъ внутренніе противоположные. Вставимъ вмѣсто F и CBF въ (1) равные, — получимъ ACD=BCD

Предложеніе.

§ 229 *Если изъ вершины прямаго угла опустить перпендикуляръ на ипотенузу, то:*

1) *перпендикуляръ будетъ среднею пропорціональною между отрѣзками ипотенузы;*

2) *каждый катетъ будетъ среднею пропорціальною между ипотенузою и прилежащимъ къ нему отрѣзкомъ.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C прямой; проведемъ CD перпендикулярно къ ипотенузѣ AB, и докажемъ, что

1) AD CD=CD. BD. Стороны острыхъ угловъ A и BCD взаимно перпендикулярны, слѣдовательно эти углы равны (§ 71); поэтому

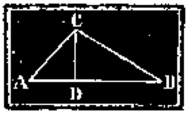


Рис. 138.

въ треугольникахъ ACD и BCD кромѣ прямыхъ угловъ два упомянутые острые угла равны слѣдовательно и третьи углы равны, именно: ACD =CBD, и треугольники подобны (§ 215). Значитъ сходственныя стороны пропорціональны: сторонѣ AD треугольника ACD сходственная въ другомъ треугольникѣ—CD, а сторонѣ CD перваго треугольника — сходственная BD въ другомъ треугольникѣ, и такъ AD: CD = CD BD

2) AD: AC:—AC: AB и BD. BC—BC: AB

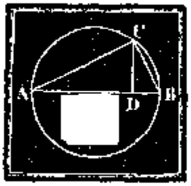
Треугольники ACD и ABC подобны, потому что въ нихъ есть по прямому углу, а уголъ A общій обоимъ треугольникамъ; слѣдовательно третіе углы равны. уголъ ACD=B (впрочемъ равенство этихъ угловъ сейчасъ было объяснено). Для стороны AD треугольника ACD сходственною будетъ AC въ треугольникѣ ABC, потому что обѣ лежатъ противъ равныхъ угловъ ACD и B; а для AC перваго треугольника сходственною будетъ AB, потому что обѣ лежатъ противъ прямыхъ угловъ. И такъ AD· AC—AC. AB —Точно также, изъ подобія треугольниковъ BCD и ABC получимъ BD· BC=BC AB

Предложеніе.

§ 230. *Если изъ какой-нибудь точки окружности опустить перпендикуляръ на діаметръ и провесть хорды изъ этой точки въ концы діаметра, то·*

1) *перпендикуляръ будетъ среднею пропорціональною между отрѣзками діаметра;*

2) *каждая хорда будетъ среднею пропорціональною между діаметромъ и прилежащимъ къ ней отрѣзкомъ.*



Фиг. 139

Пусть AB означаетъ діаметръ, CD перпендикуляръ къ AB, AC и CB —хорды Уголъ ACB, какъ вписанный въ полуокружности, равенъ прямому; слѣдовательно, примѣняя къ треугольнику ABC все сказанное въ предъидущемъ предложеніи, получимъ

$AD : CD = CD : BD$, $AD : AC = AC : AB$, $BD : BC = BC : AB$.

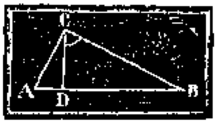
23 Выраженіе квадрата стороны треугольника, лежащей противъ прямаго, тупаго и остраго угла.

Предложеніе.

§ 231 *Квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C прямой докажемъ, что если ипотенуза AB и катеты AC и BC измѣрены, то три числа, происшедшія отъ этого измѣренія, будутъ въ такой зависимости, что квадратъ числа, выражающаго ипотенузу, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ выражающихъ катеты; для краткости же говорятъ: квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ и пишутъ такъ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$



Фиг. 138

Проведя CD перпендикулярно къ ипотенуѣ AB получимъ (§ 229,)

$$AD : AC = AC : AB$$
$$BD : BC = BC : AB,$$

отсюда, уравнявъ произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ членовъ, получимъ

$$AC^2 = AB \times AD$$
$$BC^2 = AB \times BD$$

Должно замѣтить, что подъ членами предъидущихъ двухъ пропорцій можно разумѣть не линіи, а—числа, служащія мѣрою этихъ линій и вслѣдствіе этого можно уравнять произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ.

Произведеніе двухъ линій и вообще двухъ величинъ не имѣютъ смысла; необходимо множитель долженъ быть отвлеченнымъ числомъ.

Когда говорится: произведеніе двухъ линій, то подъ этимъ должно всегда разумѣть произведенiе чиселъ, служащихъ мѣрою этихъ линiй измѣренныхъ одною и тою же единицею.

Сложимъ предъидущiя равенства, и во второй части отдѣлимъ AB общимъ множителемъ получимъ

$$AC^2 + BC^2 = AB \times (AD + BD)$$

но $AD + BD = AB$, слѣдовательно

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2.$$

§ 232 *Слѣдствiе* I. Изъ предъидущаго равенства имѣемъ

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2;$$

и такъ *квадратъ катета равенъ квадрату гипотенузы безъ квадрата другаго катета.*

§ 233 *Слѣдствiе.* II Возмемъ квадратъ ABDC и проведемъ дiагональ BC.

Фиг 59

Изъ прямоугольнаго треугольника ABC получимъ $\overline{BC}^2 = AB^2 + \overline{AC}^2 = 2AB^2$ слѣдовательно $\frac{BC^2}{AB^2} = 2$, отсюда $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$.

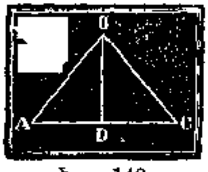
И такъ, *отношенiе дiагонали квадрата къ его боку равно квадратному корню изъ 2-хъ.*

Изъ алгебры извѣстно, что $\sqrt{2}$ есть число несоизмѣримое; поэтому дiагональ квадрата съ его бокомъ несоизмѣримы, что мы уже видѣли въ параграфѣ 197

Предложенiе

§ 234. Обратно. *если квадратъ стороны треугольника равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ двухъ сторонъ, то уголъ противулежащiй первой сторонѣ, равенъ прямому.*

Пусть въ треугольникѣ ABD $AB^2 = AD^2 + BD^2$ докажемъ, что уголъ ADB равенъ прямому. Изъ точки D возставимъ перпендикуляръ DC къ боку BD и отложимъ $DC = AD$ Въ прямоугольномъ треугольникѣ BCD



Фиг. 140

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$

а по условiю

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

слѣдовательно $AB^2 = BC^2$, отсюда $AB = BC$. И такъ, три стороны треугольника ABD равны тремъ сторонамъ треугольника BCD; а потому уголъ $ADB = BDC$. Но такъ какъ этотъ послѣдній уголъ—прямой то и уголъ ADB прямой

Предложеніе

§ 235 *Квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ тупаго угла, равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ двухъ сторонъ, вмѣстѣ съ удвоеннымъ произведеніемъ одной изъ этихъ сторонъ на ея отрѣзокъ, прилежащій къ тупому углу и отсѣкаемый перпендикуляромъ опущеннымъ изъ противулежащей вершины на эту сторону.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C тупой и BD перпендикуляр на къ AC; докажемъ, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD$ *). Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD

Фиг. 141.

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \qquad (1),$$

но изъ прямоугольнаго треугольника BCD имѣемъ (§ 232) $BD^2 = BC^2 - CD^2$.

притомъ $AD = AC + CD$, а по возвышеніи въ квадратъ членовъ этого равенства получимъ

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2AC \times CD$$

Наконецъ, вставивъ въ (1) равенство, вмѣсто BD^2 и AD^2 имъ равныя по сокращеніи члена CD^2, получимъ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD$$

Предложеніе

§ 236. *Квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ остраго угла, равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ двухъ сторонъ, безъ удвоеннаго произведенія одной изъ этихъ сторонъ на ея отрѣзокъ, прилежащій къ острому углу и отсѣкаемый перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ противулежащей вершины на эту сторону.*

---

*) Какъ въ этомъ предложеніи, такъ и въ слѣдующемъ отрѣзокъ считается отъ вершины угла до основанія перпендикуляра.

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ A острый и BD перпендикулярна къ AC; докажемъ, что $BC^2=AB^2+AC^2-2AC\times AD$

Изъ прямоугольнаго треугольника BCD

$$BC^2=CD^2+BD^2 \qquad (1)$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD

$$BD^2=AB^2-\overline{AD^2}$$

Очевидно что $CD=AD-AC$; возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ,

$$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD$$

Вставимъ въ (1) равенство, вмѣсто BD^2 и CD^2 имъ равныя получимъ

$$BC^2=AB^2+AC^2-AC\times AD.$$

Примѣчаніе. По даннымъ въ числахъ тремъ сторонамъ треугольника можно узнать, къ какому роду принадлежитъ треугольникъ относительно угловъ, т. е. будетъ ли онъ прямоугольный, тупоугольный или остроугольный. Для этого надобно составить квадраты всѣхъ сторонъ: 1) если большій изъ нихъ равенъ суммѣ прочихъ, то треугольникъ прямоугольный (§ 234), 2) если онъ превосходитъ сумму прочихъ, то треугольникъ тупоугольный (§ 235); 3 если же онъ меньше суммы прочихъ, то треугольникъ остроугольный (§ 236).

4. Пересѣкающіяся хорды окружности раздѣляютъ одна другую на части обратно пропорціональныя. — Касательная къ окружности есть средняя пропорціональная между сѣкущей, проведенной изъ одной съ нею точки и внѣшнимъ отрѣзкомъ. — Сѣкущія, исходящія изъ одной точки, обратно пропорціональны своимъ внѣшнимъ отрѣзкамъ.

Предложеніе

237. *Пересѣкающіяся хорды окружности раздѣляютъ одна другую на части обратно пропорціональныя.*

Возьмемъ какую нибудь точку F внутри круга и проведемъ чрезъ

Фиг. 142

нее діаметръ MN и какую нибудь хорду AB. Съ увеличиваніемъ отрѣзка BF, при обращеніи хорды на точкѣ F, другой отрѣзокъ AF, той же хорды, будетъ уменьшаться, потому что наклонныя къ окружности увеличиваются съ удаленіемъ отъ нормали FN, и обратно (§ 156). Поэтому рождается вопросъ: не существуетъ ли обратной пропорціональности между отрѣзками хордъ пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Для рѣшенія вопроса, согласно опредѣленію обратной пропорціональности, проведемъ черезъ F двѣ хорды AB и CD и, взявъ на каждой изъ нихъ по одному отрѣзку, отыщемъ имъ соотвѣтствующія

отрѣзку AF соотвѣтствуетъ BF той же хорды AB,
,, CF ,, DF ,, ,, ,, CD

и если окажется, что отношеніе двухъ взятыхъ отрѣзковъ равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ имъ отрѣзковъ, т. е. если будетъ справедливо

$$\frac{AF}{CF}=\frac{DF}{BF},$$

то пересѣкающіяся хорды окружности раздѣляютъ одна другую на части обратно пропорціональныя.

Проведя хорды AD и BC, получимъ подобные треугольники ADF и BCF, потому что вписанные углы A и C, какъ измѣряющіеся половиною одной и той же дуги BD, равны; по той же причинѣ уголъ B равенъ углу D, третіе углы BFC и AFD равны, какъ противоположные. И такъ сходственныя стороны этихъ треугольниковъ пропорціональны: AF и CF сходственныя, ибо лежатъ противъ равныхъ угловъ D и B; DF и BF также сходственныя, онѣ лежатъ противъ угловъ A и C; поэтому AF. CF=DF: BF. и слѣд. предложеніе справедливо

Примѣчаніе. Уравнявъ произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ, получимъ

$$AF\times BF=CF\times DF.$$

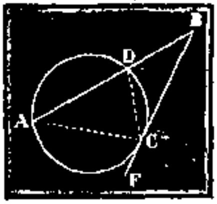
И такъ *произведеніе отрѣзковъ хордъ, проведенныхъ чрезъ какую нибудь точку, взятую внутри круга, есть постоянная величина, не смотря на то, что оба множителя будутъ измѣняться.*

Предложеніе.

§ 238 *Если чрезъ точку, взятую внѣ круга, провесть касательную и сѣкущею, то касательная будетъ средняя пропорціональная между всею сѣкущею и внѣшнимъ ея отрѣзкомъ.*

Пусть BC касательная къ окружности въ точкѣ C, докажемъ, что AB BC=BC:BD

Проведя хорды AC и CD получимъ два подобные треугольника ABC и BCD; потому что уголъ B общій, уголъ A=BCD, ибо каждый изъ нихъ измѣряется половиною дуги CD, слѣдовательно третіе углы ACB и BDC равны; поэтому ихъ сходственныя стороны пропорціональны, именно сторона AB треугольника ABC сходственна съ BC другаго тре



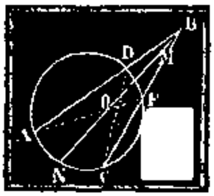
угольника, ибо обѣ лежатъ противъ равныхъ угловъ; сторона BC треугольника ABC сходственна съ BD въ другомъ треугольникѣ, — обѣ лежатъ также противъ равныхъ угловъ A и BCD И такъ AB BC—BC BD

Примѣчаніе. Изъ послѣдней пропорціи имѣемъ $BC^2 = AB \times BD$. Значитъ, если чрезъ точку, взятую внѣ круга, проведены касательная и сѣкущія, то произведеніе сѣкущей на соотвѣтствующій ей внѣшній отрѣзокъ будетъ постоянная величина, не смотря на то, что каждый изъ этихъ множителей будетъ измѣняться.

Предложеніе

§ 239. *Сѣкущія къ окружности, исходящія изъ одной точки обратно пропорціональны своимъ внѣшнимъ отрѣзкамъ..*

Возьмемъ какую нибудь точку B, внѣ круга, и проведемъ чрезъ нее нормаль BN и сѣкущую AB. Съ увеличиваніемъ внѣшняго отрѣзка BD, сѣкущая будетъ уменьшаться, потому что наклонныя къ окружности увеличиваются съ удаленіемъ ихъ отъ нормали BM, и обратно.



Фиг 143

Поэтому рождается вопросъ: не будутъ ли сѣкущія, проведенныя изъ одной точки, обратно пропорціональны своимъ внѣшнимъ отрѣзкамъ?

Для рѣшенія вопроса проводимъ черезъ точку B двѣ сѣкущія AB и BC которыхъ внѣшніе отрѣзки суть BD и BF,

сѣкущей AB соотв внѣшній отрѣзокъ BD,
,, BC , , ,, BF;

и потомъ составляемъ отношеніе сѣкущихъ $\frac{AB}{BC}$ и обратное отношеніе соотвѣтствующихъ имъ внѣшнихъ отрѣзковъ, именно $\frac{BF}{BD}$ и доказываемъ справедливость пропорціи $\frac{AB}{BC} = \frac{BF}{BD}$.

Проведя хорды AF и CD, получимъ подобные треугольники AFB и BCD; потому что уголъ B общій, углы A и C равны, какъ измѣряющіеся, каждый, половиною дуги DF· слѣдовательно, третіе углы AFB и BDC равны, и стороны AB и BF пропорціональны своимъ сходственнымъ BC и BD, т е. AB BF—BC BD

или

$$AB:BC = BF:BD$$

Получивъ эту пропорцію, заключаемъ о справедливости теоремы

Примѣчаніе Изъ предъидущей пропорціи имѣемъ

$$AB \times BD = BC \times BF;$$

значитъ, если изъ какой нибудь точки, внѣ круга, провести сѣкущія, то произведеніе всякой сѣкущей на соотвѣтственный ей внѣшній отрѣзокъ будетъ постоянная величина, не смотря на то, что оба множителя будутъ измѣняться.

Изъ трехъ предъидущихъ примѣчаній слѣдуетъ, что три предложенія, изложенныя въ §§ 237, 238 и 239, можно соединить въ одно общее предложеніе: *если изъ какой нибудь точки проведутся произвольно сѣкущія къ окружности, то произведеніе разстояній между этою точкою и точками пересѣченія каждой сѣкущей съ окружностью, равно постоянной величинѣ*

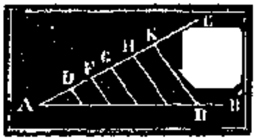
---

25. Прямую раздѣлить на равныя части и на части, пропорціональныя данымъ линіямъ —Раздѣлить прямую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. — Построеніе и употребленіе масштабовъ

Вопросъ.

§ 240. *Прямую раздѣлить на равныя части.*

Пусть требуется прямую AB раздѣлить на 5 равныхъ частей. Чрезъ конецъ A данной прямой проведемъ въ произвольномъ направленіи линію AC и отложимъ отъ точки A пять произвольныхъ, но равныхъ линій, $AD = DF = FG = GH = HK$. Послѣднюю точку K соединимъ съ B, а чрезъ остальныя точки H, G.... проведемъ параллельныя къ BK. точки пересѣченія этихъ параллельныхъ съ прямою AB раздѣляютъ послѣднюю на 5 равныхъ частей (§§ 208 209)



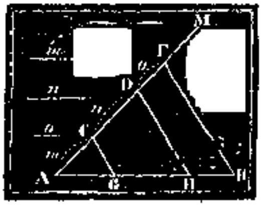
Фиг 144

Вопросъ.

§ 241. *Прямую линію раздѣлить на части, пропорціональныя даннымъ линіямъ*

Пусть требуется прямую AB раздѣлить, напримѣръ, на три части пропорціональныя даннымъ прямымъ m n и o: это значитъ что надобно найти такія части x, y и z прямой AB, чтобы

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{o}.$$



Фиг 145

Чрезъ точку A, конецъ данной прямой, проведемъ произвольную прямую AM, и по ней отложимъ $AC = m$, $CD = n$, $DF = o$; точку Г соединимъ съ B, а чрезъ точки D и C проведемъ параллельныя къ BF до пересѣченія съ AB въ точкахъ H и G въ этихъ точкахъ данная прямая раздѣлится на части пропорціональныя даннымъ прямымъ.

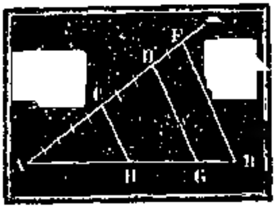
Въ самомъ дѣлѣ на основаніи §§ 208 209 получимъ

$$\frac{AG}{AC}=\frac{GH}{CD}=\frac{HB}{DF}$$

или

$$\frac{AG}{m}=\frac{GH}{n}=\frac{HB}{o}$$

Примѣчаніе Положимъ, требуется прямую AB раздѣлить, напримѣръ, на три части, пропорціональныя числамъ 5, 3 и 2. На прямой AF отложимъ AC, равную 5-ти произвольнымъ, по равнымъ линіямъ, CD равную 3-мъ и DF—двумъ такимъ же линіямъ; точку F соединимъ съ B, а чрезъ D и C проведемъ DG и CH параллельно BF, получимъ



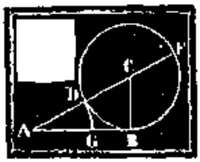
Фиг 146

$$\frac{AH}{5}=\frac{HG}{3}=\frac{GB}{2}.$$

Вопросъ

§ 242. *Раздѣлить прямую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи*, т е на такія двѣ части, чтобы одна была среднею пропорціональною между всею данною прямою и другою ея частью.

Изъ конца B данной прямой AB возставимъ къ ней перпендикуляръ и отложимъ BC, равное половинѣ AB. Принявъ C за центръ, радіусомъ CB, опишемъ окружность, а чрезъ центръ C и другой конецъ A данной прямой проведемъ сѣкущую AF, наконецъ изъ точки A, какъ центра, радіусомъ AD, опишемъ дугу до пересѣченія съ AB въ точкѣ G Докажемъ, что AB:AG=AG BG.



Фиг. 147.

Касательная AB къ окружности (§ 122) есть средняя пропорціональная между сѣкущею AF и внѣшнимъ ея отрѣзкомъ AD слѣд (§ 238)

$$AF : AB = AB : AD\cdot$$

отсюда

$$\frac{AF-AB}{AB}=\frac{AB-AD}{AD}$$

Но AB равна двумъ радіусамъ BC значитъ, AB равна діаметру DF, поэтому AF—AB=AD или AG, AB—AD равно AB — AG или BG. Вставимъ эти величины въ предъидущую пропорцію, получимъ AG · AB=BG . AG, а по перестановкѣ членовъ, AB : AG =AG : BG.

И такъ прямая AB въ точкѣ G раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи

Вопросъ

§ 243 *Построить масштабъ*

Прямая, раздѣленная по возможности на мелкія части, съ тѣмъ чтобы точнѣе измѣрять ею линіи чертежа называется *масштабомъ*.

Способы, показанные до сихъ поръ для раздѣленія прямой на равныя части, становятся неудобными, когда части дѣленія весьма мелки, и дѣйствительно, въ этомъ случаѣ даже черты, означающія точки, будутъ имѣть вліяніе на точность. Можно воспользоваться однимъ изъ слѣдующихъ построеній.

1) Пусть требуется прямую АВ, принимаемую за единицу, раздѣлить напримѣръ на 10 равныхъ частей. Проведя произвольно прямую АО отложимъ по ней отъ точки А десять произвольныхъ, но равныхъ частей, точку О соединимъ съ В, а чрезъ точки 1, 2, 3......9 линіи АО проведемъ параллельныя къ АВ. Такъ какъ прямыя, параллельныя боку АВ треугольника, отсѣкаютъ треугольники подобные треугольнику АОВ, то

Фиг. 148

$$\text{прямая } (1...1) = \frac{1}{10}AB$$

$$\text{прямая } (2\ \ 2) = \frac{2}{10}AB$$

$$» \quad (3\ \ 3) = \frac{3}{10}AB$$

$$....$$

$$» \quad (9\ \ 9) = \frac{9}{10}AB$$

2) Пусть требуется прямую АВ принимаемую за единицу, раздѣлить на 100 равныхъ частей.

Отложимъ ВС, СD и т. д равныя каждая, длинѣ АВ

Возставимъ перпендикуляръ АА къ АВ и отложимъ по немъ 10 произвольныхъ, но равныхъ частей; чрезъ всѣ точки дѣленія прямой А′А проведемъ параллельныя къ АВ, а чрезъ В С, D и т д параллельныя къ АА′. Раздѣлимъ АВ на 10 равныхъ частей и соединимъ точку А съ точкою 9 прямой АВ, а чрезъ остальныя точки дѣленія прямой АВ и чрезъ конецъ В проведемъ параллельныя къ прямой А′9. Понятно, что АВ=А′В′ и всѣ части прямой АВ равны частямъ прямой А′В′, какъ параллельныя, между параллельными, слѣдовательно В′F

Фиг. 149.

составляетъ десятую часть AB а части прямыхъ параллельныхъ AB заключающіяся между BB и BF составятъ $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ... $\frac{9}{10}$ прямой BГ (§ 243, 1 е), слѣдовательно онѣ же составляютъ $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{9}{100}$ прямой AB

§ 244 Когда надобно измѣрить какую нибудь линію чертежа, помощію масштаба, тогда растворяютъ циркуль на длину этой линіи и ставятъ его такъ по одной изъ линій параллельныхъ къ AD, чтобы двѣ его ножки совпадали съ двумя точками пересѣченія, напримѣръ съ *m* и *n*. Очевидно, что *mn* составится: 1) изъ BC или 1 - цы, 2) B6, считая по AB или 0,6 и 3) изъ 0,03; значитъ, *mn*=1,63.

На оборотъ чтобы линію, длиною, напримѣръ, въ 2,75 масштабной единицы нанести на чертежъ, — ставятъ одну ножку по линіи DD на той изъ параллельныхъ, которая проходитъ чрезъ дѣленія 5-ть линіи BB', и растворяютъ циркуль пока другая ножка не придется противъ поперечной, означенной цифрою 7 *)

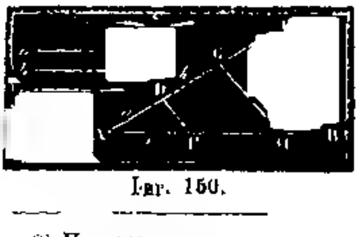
---

26 Построить: четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ линіямъ, среднюю пропорціональную между двумя данными прямыми и третью пропорціональную къ двумъ прямымъ —По данной сторонѣ построить полигонъ подобный данному.

Вопросъ.

§ 245. *Построить четвертую пропорціональную къ даннымъ тремъ прямымъ.*

Пусть *a*, *b* и *c* означаютъ три данныя прямыя; требуется построить такую прямую, чтобы отношеніе линіи *a* къ *b* было равно отношенію линіи *c* къ искомой.



Фиг. 150.

Проведемъ двѣ прямыя AB и AC подъ произвольнымъ угломъ: отъ вершины A отложимъ AD=*a*, AF=*c*, а отъ точки D отложимъ DG=*b*; соединивъ точки D

---

*) По весьма важному приложенію масштаба къ съемкамъ, полезно, чтобы учащіеся твердо освоились съ употребленіемъ его для рѣшенія двухъ изложенныхъ здѣсь пріемовъ.

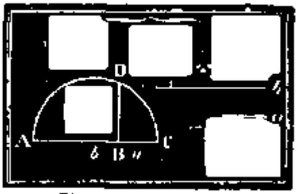
и F проведемъ чрезъ G прямую параллельно DI до пересѣченія съ AB въ точкѣ H

На основаніи свойства хорды DF, параллельной боку GH треугольника AGH (§ 209), получимъ AD:DG=AF:FH, или a: b=c: FH И такъ FH есть искомая линія

Вопросъ

§ 246. *Построить среднюю пропорціональную между двумя данными прямыми*

Пусть a и b— данныя прямыя; надобно построить такую прямую чтобы отношеніе линіи a къ искомой было равно отношенію этой искомой къ прямой b.



Фиг. 151.

На неопредѣленной прямой отложимъ AB=b и BC=a; раздѣливъ AC пополамъ, опишемъ полуокружность изъ середины AC, какъ центра, радіусомъ=$^1/_2$AC, а изъ точки B возставимъ перпендикуляръ къ AC до пересѣченія съ полуокружностью. Извѣстно, что перпендикуляръ, опущенный изъ точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра (§ 230)· слѣдовательно,

BC:BD=BD.AB

или a.BD=BD.b

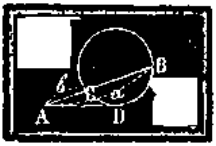
И такъ BD есть искомая линія

Рѣшеніе этого вопроса можно основывать и на томъ свойствѣ хорды что она есть средняя пропорціональная между діаметромъ, проведеннымъ чрезъ одинъ изъ ея концовъ и отрѣзкомъ этого діаметра (§ 230) Вслѣдствіе этого, искомая линія x должна быть хордою, и если $a>b$, то a будетъ діаметромъ, а b - его отрѣзкомъ. И такъ отложимъ AB=a, AC=b, изъ точки C возставимъ перпендикуляръ CD къ линіи AB до пересѣченія съ окружностью

Фиг. 152

описанною на AB какъ на діаметрѣ, прямая AD будетъ искомая ибо AB:AD=AD:AC или a: x=x; b

Рѣшеніе того же вопроса можно основать на свойствѣ касательной что она средняя пропорціональная между сѣкущею и внѣшнимъ ея отрѣзкомъ. Вслѣдствіе этого, отложимъ AB=a, AC=b и опишемъ какую нибудь окружность, которая прошла бы чрезъ двѣ точки B и C, и изъ точки A проведемъ касательную AD къ окружности; получимъ



Фиг. 153

$$AB : AD = AD : AC \text{ или } a : AD = AD : b.$$

Примѣчаніе. Чрезъ двѣ точки B и C можно провести множество окружностей, и касательныя, проведенныя къ нимъ чрезъ точку A, будутъ равны между собою, слѣдоват. всѣ точки прикосновенія этихъ касательныхъ будутъ на окружности, описанной изъ центра A радіусомъ AD.

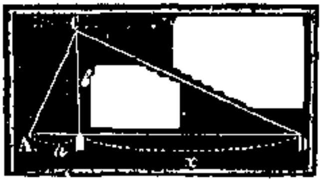
Вопросъ

§ 247. *Построить третью пропорціональную къ двумъ даннымъ прямымъ.*

Пусть a и b данныя прямыя, надобно построить такую прямую чтобы отношеніе a къ b было равно отношенію b къ искомой линіи; очевидно, что искомая линія найдется какъ четвертая пропорціональная къ тремъ линіямъ: a, b и b (§ 245).

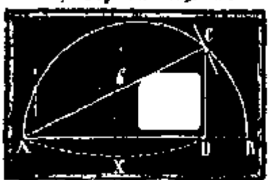
Для рѣшенія этого вопроса можно употребить еще одно изъ слѣдующихъ построеній.

1) На произвольной прямой отложимъ $AB=a$, возставимъ перпендикуляръ $BC=b$, соединивъ точки A и C возставимъ перпендикуляръ CD къ прямой AC до пересѣченія съ продолженною AB. По свойству перпендикуляра BC, опущеннаго изъ вершины прямоугольнаго треугольника на ипотенузу AD, получимъ $a : b = b : BD$, слѣд. искомая третья пропорціональная равна BD.



Фиг. 154.

2) Пусть $a > b$. Отложимъ $AB=a$ и на прямой AB, какъ діаметрѣ опишемъ окружность; изъ точки A, какъ центра, радіусомъ равнымъ b, опишемъ дугу, а изъ точки пересѣченія C опустимъ перпендикуляръ CD на AB; получимъ $AB : AC = AC : AD$ или $a : b = b : AD$ слѣд. AD есть искомая линія.



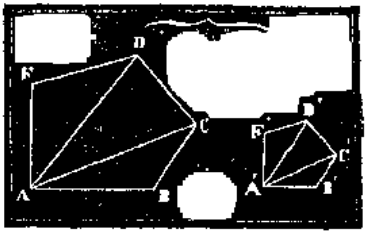
Фиг. 155

Вопросъ

§ 248. *На данной сторонѣ построить полигонъ подобный данному.*

Пусть требуется построить на прямой A′B′ многоугольникъ, подобный многоугольнику ABCDF. Изъ вершины проведемъ діагонали AC, AD; на прямой A′B′, при точкѣ A′ построимъ уголъ

B′A′C′=ABC, а при точкѣ B′—уголъ A′B′C′=ABC: получимъ треугольникъ A′B C′, подобный ABC (§ 215). Точно также на прямой A C′ построимъ треугольникъ A′C D′ подобный ACD и на прямой A′D — треугольникъ A′D′F′, подобный ADF. Многоугольникъ A′B′C′D F подобенъ ABCDF, потому что оба многоугольника разбиваются изъ вершинъ равныхъ угловъ A и A′ на треугольники подобные и одинаково расположенные.



фиг 136

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Измѣренiе и сравненiе площадей прямолинейныхъ фигуръ

1. Площади прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанiя, относятся какъ высоты.—Площади прямоугольниковъ относятся какъ произведенiя основанiй на соотвѣтствующiя высоты. —О мѣрѣ площадей. — Площадь прямоугольника.

§ 249. *Площадью* какой нибудь фигуры называется величина части плоскости, заключающаяся между линiями которыя ограничиваютъ фигуру.

Измѣрить площадь фигурѣ значитъ узнать изъ сколькихъ единицъ и частей единицы состоитъ эта площадь. За единицу для измѣренiя площадей принимаютъ квадратъ, сторона котораго равна единицѣ.

Измѣренiе площадей основывается на слѣдующихъ предложенiяхъ

Предложенiе

§ 250. *Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанiя, пропорцiональны ихъ высотамъ.*

Въ прямоугольникѣ ABDC примемъ бокъ AB за основанiе, AC будетъ высота.

Если на продолженiи высоты AC возьмемъ какую нибудь точку E проведемъ EF параллельно основанію AB, то получимъ прямоугольникъ ABFE, большій даннаго прямоугольника ABDC; слѣдовательно, съ увеличеніемъ высоты прямоугольника увеличивается площадь прямоугольника,—значитъ выполнено первое условіе пропорціональности (§ 201).

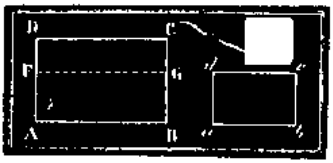

Фиг. 156.

Увеличимъ высоту напримѣръ, въ 3 раза,—пусть AC=CE=EG, и чрезъ точки дѣленія проведемъ прямыя EF и GH параллельно основанію AB получимъ три прямоугольника ABDC, CDFE и FEGH равные между собою; потому что у нихъ равныя основанія и высоты (§ 117). Слѣдовательно, съ увеличеніемъ высоты въ три раза, прямоугольникъ увеличивается во столько-же разъ: этимъ выполняется второе условіе предложенія о пропорціональности. Значитъ, если Q и q означаютъ площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, а H и h означаютъ соотвѣтственныя имъ высоты, то $Q : q = H : h$.

§ 251. Такъ какъ за основаніе прямоугольника принимается какая нибудь его сторона, а высотою будетъ смежная ей сторона, то можно сказать, что *прямоугольники имѣющіе равныя высоты пропорціональны ихъ основаніямъ.*

Предложеніе

§ 252. *Площади всякихъ двухъ прямоугольниковъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты,* т. е. произведеніямъ отвлеченныхъ чиселъ, происшедшихъ отъ измѣренія основаній и высотъ какою нибудь единицею.


Фиг. 157

Пусть будутъ даны ABCD и *abcd* два прямоугольника; построимъ прямоугольникъ, котораго одинъ бокъ равенъ основанію AB перваго прямоугольника, а другой, смежный ему бокъ, былъ бы равенъ высотѣ *ad* прямоугольника *abcd*: съ этою цѣлью отложимъ AF=*ad*, и проведемъ FG параллельно основанію AB, — получимъ прямоугольникъ ABGF. Прямоугольники AC и AG имѣютъ равныя основанія, слѣдовательно они пропорціональны ихъ высотамъ AD и AF; а прямоугольники AG и *ac* имѣютъ равныя высоты, слѣдовательно они пропорціональны ихъ основаніямъ AB и *ab*. И такъ

$$\frac{AC}{AG}=\frac{AD}{AF},$$
$$\frac{AG}{ac}=\frac{AB}{ab},$$

перемножимъ равныя на равныя сокративъ AG, и вставивъ *ad* вмѣсто AF, получимъ

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AD}{ad}\times\frac{AB}{ab}\quad . \qquad (1)$$

или

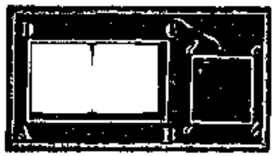
$$\frac{AC}{ac}=\frac{AD\times AB}{ad\times ab} \qquad (2)$$

Примѣчаніе. Первое равенство показываетъ, что *отношеніе площадей двухъ прямоугольниковъ равно произведенію отношенія ихъ основаній на отношеніе ихъ высотъ.* Такимъ образомъ нахожденіе отношенія площадей двухъ прямоугольниковъ замѣняется отыскиваніемъ отношеній прямыхъ линій, что намъ уже извѣстно (§ 192, 199).

Предложеніе

§ 253 *Площадь прямоугольника равна произведенію его основанія на высоту.*

Пусть требуется измѣрить прямоугольникъ ABCD для достиженія цѣли должно найти отношеніе прямоугольника AC къ квадрату *ac* (§ 195), котораго бокъ равенъ какой-нибудь линейной единицѣ. Такъ какъ квадратъ есть въ тоже время прямоугольникъ, то на основаніи предъидущаго предложенія, имѣемъ



Фиг. 158

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}\times\frac{AD}{ab}\quad . \qquad . \ (1)$$

Найдемъ отвлеченныя числа, выражающія отношенія, $\frac{AB}{ab}$ и $\frac{AD}{ab}$, или, что все равно, измѣримъ основаніе AB и высоту AD единицею *ab*; *произведеніе двухъ полученныхъ отвлеченныхъ чиселъ покажетъ, сколько разъ квадратъ ac содержится въ прямоугольникѣ* AB. И поэтому говорятъ, что площадь прямоугольника равна произведенію его основанія на высоту. Напримѣръ, если линейный футъ содержится 5 разъ въ основаніи AB и 3 раза въ высотѣ AD, то отношеніе

$$\frac{AC}{ac}=5\times 3 \text{ или } 15,$$

значитъ, квадратъ въ площади прямоугольника содержится 15 разъ или прямоугольникъ AC равенъ 15 квадратнымъ футамъ.

Примѣчаніе. Въ равенствѣ (1) бокъ $ab=1$ и квадратъ $ac=1$ Обыкновенно 1-ца не пишется ни дѣлителемъ, ни множителемъ; на этомъ основаніи равенство (1) можно такъ писать

$$AC=AB\times AD$$

При чемъ мы должны помнить что AB AD и прямоугольникъ AC выражаютъ уже не протяженія, а отвлеченныя числа, или отношенія этихъ протяженій къ принятымъ единицамъ: основанія и высоты—къ линейной единицѣ, а прямоугольника —къ квадрату, котораго бокъ—линейная единица

Предложеніе.

§ 254. *Площадь квадрата равна второй степени его бока*

Дѣйствительно, квадратъ есть прямоугольникъ, въ которомъ основаніе равно высотѣ; поэтому, если бокъ квадрата, принятаго за 1-цу, содержится a разъ въ бокѣ измѣряемаго квадрата, то площадь этого послѣдняго равна $a\times a$ или a^2

Примѣчаніе. На этомъ основаніи получимъ слѣдующія отношенія квадратныхъ мѣръ

квадратная миля	=	7^2,	или	49	кв. верстамъ
квадратная верста	=	500^2,	или	250000	кв. саженямъ
квадратная сажень	=	7^2,	или	49	кв. футамъ
квадратный футъ	=	12^2,	или	144	кв. дюймамъ
квадратный дюймъ	=	10^2	или	100	кв. линіямъ,
квадратная сажень	=	3^2	или	9	кв. аршинамъ,
квадратный арш.	=	16^2,	или	256	кв. вершкамъ.

Кромѣ этихъ мѣръ у насъ употребляется еще *десятина*; это прямоугольникъ, котораго основаніе 60 саженъ а высота 40, или—основаніе 80 саженъ, а высота 30; въ обоихъ случаяхъ площадь десятины равна 2400 квадратнымъ саженямъ.

256. Говоря о десятинѣ, можно замѣтить что прямоугольники, одинъ—съ основаніемъ въ 60 и высотою въ 40 саженъ, а другой—съ основаніемъ въ 80 и высотою въ 30 саженъ не могутъ быть совмѣщены; между тѣмъ площади ихъ равны, ибо обѣ содержатъ одинаковое число единицъ или мѣръ, 2400 кв. саженъ. Вообще фигуры могутъ, различаясь по виду содержать одинаковое число квадратныхъ мѣръ.

такія фигуры называются *равномѣрными*, равными же будетъ называть по прежнему, фигуры совмѣщающіяся. Разумѣется, что равныя фигуры необходимо равномѣрны; обратное же не всегда бываетъ вѣрно

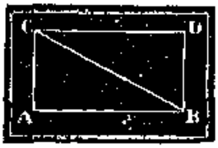
— —

2 Площади треугольниковъ: прямоугольнаго и косоугольнаго. Площади трапеціи параллелограмма и описаннаго около круга многоугольника

Предложеніе.

§ 256. *Площадь прямоугольнаго треугольника равна половинѣ произведенія его катетовъ.*

Пусть ABC прямоугольный треугольникъ, AB и AC его катеты Чрезъ точки B и C проведемъ BD и CD параллельно катетамъ, — получимъ прямоугольникъ ABDC; потому что въ немъ противуположные бока параллельны, а уголъ A прямой Треугольники ABC и BCD равны между собою; потому что параллелограммъ діагональю дѣлится пополамъ (§ 105); слѣдовательно треугольникъ ABC составляетъ половину прямоугольника ABDC; а площадь этого послѣдняго равна произведенію основанія AB на высоту AC,—слѣдовательно площадь треугольника ABC равна половинѣ этого произведенія т. е



Фиг. 154.

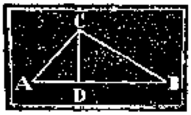
$$ABC = \frac{AB.AC.}{2}$$

Припомнимъ сказанное въ § 253, что это выраженіе ненадобно принимать въ буквальномъ смыслѣ, и что поэтому, для отъискапія числа квадратныхъ, напримѣръ футовъ въ треугольникѣ, надобно найти отношенія катетовъ AB и AC къ футу: половина произведенія, полученныхъ отношеній, покажетъ число квадратныхъ футовъ въ треугольникѣ. Все сказанное здѣсь надобно постоянно имѣть въ виду когда дѣло идетъ объ измѣреніи площади

Предложеніе

257. *Площадь всякаго треугольника равна половинѣ произведенія его основанія на высоту.*

Пусть въ треугольникѣ ABC за основаніе принятъ бокъ AB вы сотою будетъ перпендикуляръ CD къ основанію AB. Треугольникъ ABC равенъ суммѣ прямоугольныхъ треугольниковъ ACD и BCD, т. е. $ABC = ACD + BCD$



Фиг. 160

Но площадь прямоугольнаго треугольника $ACD = \frac{1}{2} AD . CD$ также площадь $BCD = \frac{1}{2} BD . CD$ поэтому

$$ABC = \frac{AD.CD + BD.CD}{2}$$

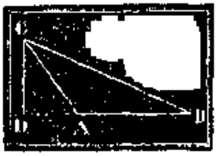
или, отдѣливъ CD общимъ множителемъ

$$ABC = \frac{(AD + BD).CD}{2}$$

Сумма $AD + BD = AB$ слѣдовательно

$$ABC = \frac{AB.CD}{2}$$

Если высота CD треугольника падетъ на продолженіе основанія AB то площадь треугольника ABC равна разности площадей прямоугольныхъ треугольниковъ BDC и ACD; слѣдовательно



Фиг. 161.

$$ABC = \frac{BD.CD}{2} - \frac{AD.CD}{2}$$

$$ABC = \frac{(BD - AD).CD}{2}$$

$$ABC = \frac{AB.CD}{2}$$

§ 258. *Слѣдствіе* I. *Площади двухъ треугольниковъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

Пусть T и t означаютъ площади треугольниковъ, B и b — ихъ основанія, а H и h — ихъ высоты. На основаніи послѣдняго предложенія имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{BH}{2} \\ t = \frac{h}{2} \end{array}\right\} \text{ отсюда } \frac{T}{t} = \frac{BH}{bh}.$$

§ 259. *Слѣдствіе* II. *Площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны ихъ высотамъ, а при равныхъ высотахъ пропорціональны основаніямъ.*

И дѣйствительно, если въ пропорціи предъидущаго параграфа положимъ $B = b$ то получимъ $T : t = H : h$; а принявъ $H = h$, получимъ $T : t = B : b$.

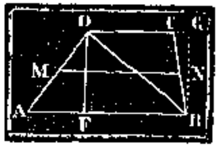
§ 260 *Слѣдствіе* III. Если одновременно $B = b$ и $H = h$, то и $T = t$, значитъ, *треугольники, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты равномѣрны*

Примѣчаніе. Два предъидущія предложенія можно соединить въ одно, изложенное въ предложеніи § 258: *площадь всякаго треугольника равна половинѣ произведенія его основанія на высоту;* потому что катеты прямоугольнаго треугольника можно принять одинъ за основаніе, а другой за высоту

Предложеніе

§ 261. *Площадь трапеціи равна произведенію полусуммы параллельныхъ ея основаній на высоту.*

Пусть ABCD трапеція, AB и CD ея параллельныя основанія а DF=BG —высота.



Фиг. 162

Проводя діагональ BD, мы разобьемъ трапецію на два треугольника: въ одномъ изъ нихъ — площадь $ABD={}^1/_2AB\times DF$, въ другомъ — площадь $BCD={}^1/_2CD\times BG$ или ${}^1/_2CD\times DF$, потому что разстоянія между параллельными повсюду равны; и такъ

$$\text{площадь } ABCD=\frac{AB}{2}\times DF+\frac{CD}{2}\times DF$$

а отдѣливъ DF общимъ множителемъ, имѣемъ

$$\text{площадь } ABCD=\frac{AB+CD}{2}\times DF.$$

§ 262 *Слѣдствіе. Площадь трапеціи равна произведенію ея высоты на прямую, соединяющую середины не параллельныхъ боковъ.*

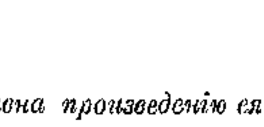
Если чрезъ середину M бока AD проведемъ хорду MN параллельно основаніямъ трапеціи, то прямая MN будетъ равна полусуммѣ основаній (§ 101); слѣдовательно

$$\text{площадь } ABCD=MN\times DF$$

Предложеніе

§ 263. *Площадь параллелограмма равна произведенію его основанія на высоту.*

Пусть ABCD параллелограммъ, за основаніе его примемъ AB или CD, высотою будетъ перпендикуляръ DF.



Фиг. 163.

Проведя діагональ BD и повторивъ разсужденія, какъ и при выводѣ площади трапеціи найдемъ

$$\text{площадь } ABCD=\frac{AB+CD}{2}DF.$$

Но въ параллелограммѣ противуположныя стороны равны слѣдовательно $AB=CD$, и половина суммы $AB+CD$ равна AB, и такъ

$$\text{площадь } ABCD=AB\times DF$$

Впрочемъ, того же вывода можно достигнуть независимо отъ предло женія опредѣляющаго площадь трапеціи; а именно: діагональ BD дѣлитъ параллело раммъ на два равные треугольника (§ 105), слѣдо вательно площадь $ABCD=2.ABD$

или » $ABCD=2\frac{AB.DF}{2}$,

отсюда » $ABCD=AB\times DF$.

§ 264. *Слѣдствіе* I. *Площади двухъ параллелограммовъ про порціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

Дѣйствительно, если Q и q означаютъ площади двухъ параллело граммовъ, а B и b—ихъ основанія, H и h высоты, то

$$\begin{matrix} Q=BH \\ q=bh \end{matrix} \quad \text{отсюда} \frac{Q}{q}=\frac{BH}{bh}.$$

§ 265 *Слѣдствіе*. II. Если въ предъидущей пропорціи положимъ $B=b$, то получимъ $Q:q=H:h$, т. е. *площади параллелограммовъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

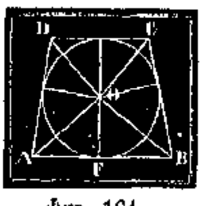
Положимъ въ той же пропорціи $H=h$, получимъ $Q:q=B:b$, т. *площади параллелограммовъ, имѣющихъ равныя высоты, пропор ціональны основаніямъ.*

§ 266. *Слѣдствіе* III. Если одновременно $B=b, H=h$, то и $Q=q$ т. е. *параллелограммы, имѣющіе равныя основанія и высоты, равномѣрны*

Предложеніе.

§ 267. *Площадь многоугольника, описаннаго около круга, равна половинѣ произведенія изъ его периметра на радіусъ этого круга.*

Требуется найти площадь многоугольника ABCD, описаннаго около круга. Соединивъ центръ круга съ вершинами многоугольника, найдемъ, что площадь многоугольника ABCD равна суммѣ площадей треугольниковъ $ABO+BCO+CDO+ADO$ За основанія этихъ треугольниковъ примемъ стороны даннаго многоугольника AB BC.....; высота у нихъ будетъ общая—радіусъ OF круга, потому что перпендикуляры, опущенные изъ центра на касательныя, проходятъ чрезъ точки касанія. И такъ площадь



Фиг 164

$$ABCD=AB\frac{FO}{2}+BC\frac{FO}{2}+CD\frac{FO}{2}+AD.\frac{FO}{2}$$

или $$ABCD=(AB+BC+CD+AD)\frac{FO}{2},$$

гдѣ сумма боковъ $AB+BC+CD+AD$ есть периметръ многоугольника описаннаго около круга, слѣд. предложеніе доказано.

---

3 Треугольники, имѣющіе по равному углу, относятся какъ произведенія изъ сторонъ, заключающихъ эти углы. — Подобные треугольники и подобные полигоны относятся какъ квадраты сходственныхъ боковъ

Предложеніе.

§ 268. *Треугольники, имѣющіе по равному углу, пропорціональны произведеніямъ сторонъ, заключающихъ эти углы*

Положимъ, что уголъ $A=A'$. Площади треугольниковъ пропорціональны произведеніямъ изъ ихъ основаній на высоты (§ 259); слѣдовательно

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{BD}{B'D'}.$$

Высоты BD и $B'D'$ треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ отсѣкаютъ подобные треугольники ABD и $A'B'D'$, потому что уголъ $A=A'$, прямой уголъ $ADB=A'D'B'$, —слѣдовательно сходственныя стороны пропорціональны.

$$\frac{BD}{B'D'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Вставимъ въ первое равенство, вмѣсто отношенія $\frac{BD}{B'D'}$, ему равное $\frac{AB}{A'B'}$, получимъ

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{AB}{A'B'} \text{ или } \frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AC\times AB}{A'C'\times A'B'}.$$

Предложеніе.

§ 269. *Площади подобныхъ треугольниковъ пропорціональны квадратамъ своихъ сходственныхъ сторонъ.*

Пусть треугольникъ ABC и $A'B'C'$ подобны, а углы A и A' сходственные, слѣдовательно, уголъ $A=A'$. На основаніи предъидущаго предложенія, имѣемъ

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{AB}{A'B'};$$

а въ слѣдствіе подобія треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ сходственныя стороны пропорціональны

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$$

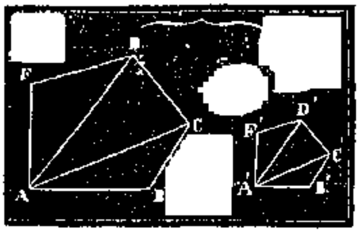
Вставивъ въ первое равенство, вмѣсто отношенія $\frac{AC}{A'C'}$, ему равное $\frac{AB}{A'B'}$ и перемноживъ дроби получимъ

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

Предложеніе.

§ 270. *Площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ своихъ сходственныхъ сторонъ.*

Пусть многоугольники $ABCDF$ и $A'B'C'D'F'$ подобны, изъ вершинъ равныхъ угловъ A и A' проведемъ діагонали во всѣ прочія вершины —получимъ подобные треугольники, и, въ слѣдствіе предъидущаго предложенія, будемъ имѣть



$$ABC : A'B'C'=BC^2 : B'C'^2$$
$$ACD : A'C'D'=CD^2 : C'D'^2$$
$$ADF : A'D'F'=DF^2 : D'F'^2$$

Стороны подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны; значитъ $BC:B'C'=CD:C'D'=DF:D'F'$, а возвысивъ въ квадратъ всѣ члены этихъ пропорцій, найдемъ, что вторыя отношенія выше приведенныхъ равенствъ равны между собою; и такъ

$$ABC:A'B'C'=ACD:A'C'D'=ADF:A'D'F'.$$

Примѣнивъ къ этому ряду равныхъ отношеній извѣстное свойство, что сумма предъидущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ и проч. получимъ

$$\frac{ABC+ACD+ADF}{A'B'C'+A'C'D'+A'D'F'}=\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{BC^2}{B'C'^2}.$$

Квадратъ, построенный на гипотенузѣ равномѣренъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ.—Полигонъ, построенный на гипотенузѣ, будетъ равномѣренъ суммѣ полигоновъ, ему подобныхъ, построенныхъ на катетахъ, если гипотенуза и катеты представляютъ сходственные бока этихъ полигоновъ.

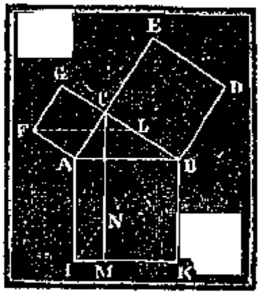
Предложеніе

§ 271. *Квадратъ, построенный на гипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ* *).

---

* Предложеніе это доказано греческимъ геометромъ Пиѳагоромъ, жившимъ въ VI вѣкѣ до Р. Х.

Построимъ на сторонахъ прямоугольнаго треугольника ABC (уголъ C прямой) квадраты ABKI, BCED и ACGF, и докажемъ что первый квадратъ равномѣренъ суммѣ остальныхъ двухъ



Фиг 165

Проведемъ CM перпендикулярно къ ипотенузѣ AB, IN параллельно катету AC, и FL параллельно ипотенузѣ AB: получимъ два равные параллелограмма ACNI и ABLF (§ 109). Въ самомъ дѣлѣ, двѣ стороны AI = AB, AC=AF, какъ стороны квадратовъ, притомъ углы между этими сторонами равны CAI=BAF, ибо каждый состоитъ изъ прямаго угла сложеннаго съ угломъ BAC. Прямоугольникъ AM и параллелограммъ AN имѣютъ общее основаніе AI и одну высоту IM, слѣдовательно они равномѣрны (§ 266); по той же причинѣ квадратъ AG равномѣренъ параллелограмму BF, а какъ эти параллелограммы равномѣрны то прямоугольникъ AM равномѣренъ квадрату AG

Точно также докажемъ, что прямоугольникъ BM равномѣренъ квадрату BE, а какъ сумма прямоугольниковъ AM и BM составляетъ квадратъ AK, то квадратъ AK равномѣренъ суммѣ квадратовъ AG и BE.

Примѣчаніе. Извѣстно, что площадь квадрата равна второй степени или квадрату его бока; слѣдовательно, если стороны прямоугольнаго треугольника измѣрены, то квадратъ числа, происшедшаго отъ измѣренія ипотенузы, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, происшедшихъ отъ измѣренія катетовъ. Такимъ образомъ вновь доказано предложеніе § 231 – Предложенія, опредѣляющія квадраты сторонъ, лежащихъ противъ острыхъ и тупыхъ угловъ треугольника, могутъ быть доказаны вновь, принимая квадраты чиселъ, служащихъ мѣрою сторонамъ, за квадраты, построенные на этихъ сторонахъ, а произведенія чиселъ за прямоугольники, въ которыхъ основаніе и высота измѣряются этими числами.

Предложеніе.

§ 272. *Многоугольникъ, построенный на ипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ многоугольниковъ, ему подобныхъ, построенныхъ на катетахъ, если ипотенуза и катеты представляютъ сходственные бока многоугольниковъ.*


Фиг 166

Пусть ABC прямоугольный треугольникъ, а многоугольники Q P и R подобны между собою причемъ стороны AB, BC и AC сходственныя

Извѣстно (§ 270), что площади подобныхъ мно гоугольников пропорціональны квадратамъ сходственныхъ боковъ слѣдовательно

$$P : R = BC^2 : AC^2;$$

отсюда

$$\frac{P+R}{R} = \frac{BC^2+AC^2}{AC^2},$$

притомъ (§ 270)

$$\frac{Q}{R} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Три члена одной пропорціи равны тремъ членамъ другой, потому что квадратъ ипотенузы AB^2 равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ BC^2+AC^2 слѣдовательно остальные члены также равны т. е.

$$Q = P+R$$

---

5 Даннаго полигона найти площадь; превратить полигонъ въ многоугольникъ ему равномѣрный, но имѣющій меньше боковъ. — Построить квадратъ, равномѣрный данному прямоугольнику или данному треугольнику. — Построить треугольникъ, имѣющій данную высоту и равномѣрный данному треугольнику.

Вопросъ

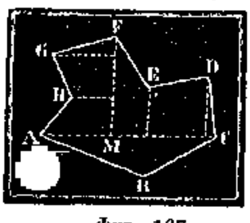
§ 273 *Найти площадь даннаго многоугольника.*

Пусть данъ какой нибудь многоугольникъ. Разобьемъ его діагоналями на треугольники и проведя ихъ высоты, измѣримъ въ каждомъ изъ нихъ основаніе и высоту По этимъ даннымъ легко вычислить площадь каждаго треугольника; а взявъ сумму этихъ площадей, получимъ площадь многоугольника

Вопросъ.

§ 274 *Измѣрить площадь какой нибудь прямолинейной фигуры.*

Пусть дана прямолинейная фигура, напримѣръ, ABCDEFGH. Фигуру эту можно разбить діагоналями на треугольники; но проще будетъ разбить ее на трапеціи и треугольники. Проведемъ діагональ AC между самыми отдаленными вершинами; изъ вершинъ F E и D проведемъ перпендикуляры на AC, а изъ вершинъ H и G — перпендикуляры на FM. Такимъ образомъ разсматриваемая фигура будетъ разбита на 3 треугольника и на 4 трапеціи; вычисливъ тѣ и другія и сложивъ полученныя числа найдемъ площадь всей фигуры



Фиг 167.

Вопросъ

§ 275. *Измѣрить по приближенію площадь между кривою adb, прямою $a'b'$ и перпендикулярами aa' и bb' проведенными на эту прямую изъ концовъ кривой.*

Прямую $a'b'$ раздѣлимъ на четное число равныхъ частей въ точкахъ c', d', e',....; пусть h означаетъ одну изъ частей дѣленія, величина эта должна быть столь малою, чтобы части кривой adb, заключающіяся между перпендикулярами, возставленными изъ точекъ дѣленія c', d', e',....; можно было принять за прямыя линіи.

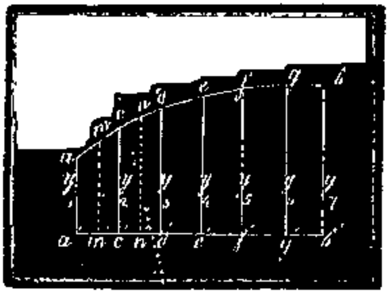


Рис. 168

Расмотримъ площадь $aa'dd'$, составленную изъ двухъ послѣдовательныхъ отрѣзковъ; раздѣлимъ $a'd'$ на три равныя части въ точкахъ m' и n'; тогда

$$a'm'=m'n'=nd'=\frac{2}{3}h$$

и точка c составляетъ середину прямой $m'n'$. Принимая дуги am, mn и dn за прямыя линіи, помощію выраженія трапеціи, получимъ

$$\text{площ } aa'm'm=\frac{h}{3}(y_1+mm')$$

$$\text{площ } mnn'm'=\frac{h}{3}(mm'+nn')$$

$$\text{площ } ndd'n'=\frac{h}{3}(nn'+y_3)$$

отъ сложенія этихъ площадей получимъ

$$\text{площ. } aa'd'd=\frac{h}{3}[y_1+2(mm'+nn')+y_3]$$

но въ трапеціи $mnn'm'$, $mm'+nn'=2y_2$ (§ 101), слѣдовательно

$$\text{площ } aa'd'd=\frac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3)\,. \qquad (1)$$

Примѣняя этотъ законъ къ площадямъ $dff'd'$ и $fbb'f'$, получимъ

$$\text{площ } dff'd'=\frac{h}{3}(y_3+4y_4+y_5) \qquad (2).$$

$$\text{площ } fbb'f'=\frac{h}{3}(y_5+4y_6+y_7) \qquad (3)$$

Сложивъ равенства (1) (2) и (3), получимъ

$$\text{площ } abb'a'=\frac{h}{3}[y_1+y_7+4(y_2+y_4+y_6)+2(y_3+y_5)]$$

И такъ *для полученія криволинейной площади, по приближенію, надобно третью часть линіи дѣленія умножить на сумму край-*

нихъ перпендикуляровъ, увеличенную учетверенною суммою четныхъ перпендикуляровъ и удвоенною суммою нечетныхъ перпендикуляровъ. Найденная формула предложена англійскимъ математикомъ *Симпсономъ:* она имѣетъ весьма важныя приложенія.

Вопросъ

§ 276. *Данный многоугольникъ* (ABCDF) *превратить въ полигонъ ему равномѣрный, но имѣющій менѣе боковъ*

Соединимъ концы A и C двухъ смежныхъ боковъ AB и BC; чрезъ общую ихъ точку B проведемъ BG параллельно прямой AC до пересѣченія въ G съ продолженнымъ бокомъ CD, который смеженъ съ однимъ изъ двухъ первыхъ боковъ, наконецъ соединимъ точку G съ A тогда получимъ многоугольникъ AGDF, котораго число сторонъ, очевидно, на одну меньше противъ даннаго многоугольника ABCDF, а площади ихъ равномѣрны.

Фиг. 169

Дѣйствительно, треугольники ABC и ACG равномѣрны (§ 260), потому что имѣютъ общее основаніе AC и равныя высоты—разстоянія между параллельными линіями BG и AC; придавъ къ этимъ треугольникамъ площадь ACDF, получимъ равномѣрныя площади ABCDF и AGDF

Примѣняя къ многоугольнику AGDF построеніе, исполненное надъ даннымъ многоугольникомъ получимъ треугольникъ равномѣрный данному многоугольнику.

Вопросъ.

§ 277. *Построить квадратъ, равномѣрный данному прямоугольнику или данному треугольнику.*

1) Пусть B и H означаютъ основаніе и высоту прямоугольника а X—бокъ искомаго квадрата.

Площадь прямоугольника равна произведенію BH, а площадь квадрата равна X^2, по условію эти площади равномѣрны, слѣдовательно

$$X^2 = BH; \text{ отсюда } B \cdot X = X \cdot H$$

И такъ искомый бокъ легко построить, какъ среднюю пропорціональную величину между B и H (см. § 246)

Точно также параллелограммъ обращается въ квадратъ.

2) Чтобы найти бокъ квадрата, равномѣрнаго данному треугольнику,

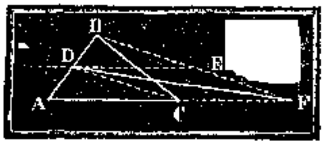
надобно найти среднюю пропорціональную между основаніемъ треугольника и половиною его высоты, или между половиною основанія и высотою, потому что площадь треугольника равна половинѣ произведенія изъ основанія на высоту.

Такъ какъ всякій многоугольникъ можно обратить въ треугольникъ, ему равномѣрный а этотъ послѣдній въ квадратъ, то *всякій многоугольникъ можно обратить въ квадратъ, ему равномѣрный.*

Вопросъ

§ 278 *Построить треугольникъ, имѣющій данную высоту і равномѣрный данному треугольнику*

Пусть ABC данный треугольникъ. Проведемъ къ боку AC параллельную DE въ разстояніи отъ него, равномъ данной высотѣ и разсмотримъ два случая, смотря потому, пересѣчетъ ли DE остальные два бока или же ихъ продолженіе (фиг. 170 и 171).

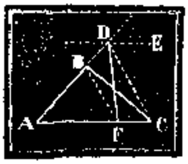


Фиг 170.

1) Пусть D означаетъ пересѣченіе DE съ бокомъ AB. Проведемъ DC, а чрезъ вершину B -параллельную ей BF, затѣмъ соединимъ D и F, тогда получимъ треугольникъ ADF, котораго высота равна данной прямой, а площадь равномѣрна треугольнику ABC

Дѣйствительно, треугольники BCD и CDF равномѣрны (§ 260), потому что у нихъ общее основаніе CD и высоты равны, какъ разстоянія между параллельными BF и DC; придавъ треугольникъ ACD къ этимъ равномѣрнымъ треугольникамъ, получимъ также равномѣрныя площади именно треугольникъ ABC=ADF.

2) Пусть DE параллельна AC и проведена въ разстояніи отъ нея равномъ данной высотѣ, — причемъ она пересѣкаетъ продолженіе бока AB въ точкѣ D



Фиг. 171

Проведемъ DC и параллельную къ ней BF; тогда соединивъ точку I съ D, получимъ искомый треугольникъ ADF; потому что треугольники BCF и BDF равномѣрны (§ 260), слѣдовательно, придавъ къ нимъ треугольникъ ABI получимъ треугольникъ ABC=ADF.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ

Правильные многоугольники.—Измѣреніе круга.

Правильный многоугольникъ. — Около правильнаго многоугольника можно всегда описать и въ немъ вписать окружность. — Центръ и апоѳема правильнаго полигона; величина его угловъ. — Правильные полигоны одного числа угловъ между собою подобны. — Центральный уголъ. — Переходъ отъ полигона къ многоугольнику съ двойнымъ числомъ боковъ. — Построеніе полигона описаннаго, когда имѣется полигонъ вписанный и на оборотъ. — Выраженіе чрезъ радіусъ и бокъ полигона вписаннаго многоугольниковъ, подобнаго: описаннаго и вписаннаго съ удвоеннымъ числомъ угловъ.

§ 279. Вообразимъ, что окружность раздѣлена на равныя части. Отъ соединенія каждыхъ двухъ сосѣдственныхъ точекъ дѣленія составится многоугольникъ, котораго всѣ бока равны между собою, какъ хорды соотвѣтствующія равнымъ дугамъ; углы этого многоугольника также равны, потому что они вписанные и между боками ихъ заключаются равныя дуги, а углы измѣряются, каждый, половиною этихъ дугъ. Такой многоугольникъ называется правильнымъ. Итакъ *правильнымъ многоугольникомъ называется многоугольникъ, котораго всѣ стороны и углы равны между собою.* Поэтому, равносторонній треугольникъ и квадратъ—правильные многоугольники.

Изъ предъидущаго разсужденія слѣдуетъ

Предложеніе 1.

Если окружность раздѣлена на равныя части, то отъ соединенія каждыхъ двухъ сосѣдственныхъ точекъ дѣленія получается правильный многоугольникъ.

Предложеніе 2.

Если окружность раздѣлена на равныя части и чрезъ каждую точку дѣленія провести касательную до встрѣчи съ сосѣдственными касательными, то получится правильный многоугольникъ.

Пусть въ точкахъ A B C D, E и F окружность раздѣлена на равныя части; проведя чрезъ эти точки касательныя къ окружности, докажемъ, что многоугольникъ MNPQRS — правильный. Проведемъ хорды AB, BC CD и т. д., всѣ онѣ равны между собою (§ 142, 3 е); слѣдов: въ треугольникахъ ABM, BCN, CDP и т. д имѣемъ по равной сторонѣ; углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, также равны (§ 130); слѣдов: и остальныя сходственныя части равны, именно:

Фиг. 172.

1) AM=BN=CP=и т. д., BM=CN=DP и т. д. притомъ сторона AM=BM, потому обѣ лежатъ противъ равныхъ угловъ въ треугольникѣ ABM; значитъ всѣ вышеприведенныя отрѣзки равны между собою, а отсюда слѣдуетъ, что MN, равная удвоенной BM, равна NP, удвоенной CN и т. д.; значитъ всѣ стороны многоугольника MNPQRS равны между собою

2) Углы M, N, P, Q, R и S также равны между собою. И такъ многоугольникъ MNPQRS—правильный.

Предложеніе

§ 280 *Около правильнаго многоугольника всегда можно описать и въ немъ вписать окружность.*

Пусть ABCDEF правильный многоугольникъ, слѣдовательно стороны его равны AB=BC=CD и углы равны ABC=BCD=CDE=....

1) Чрезъ три точки A B и C опишемъ окружность, центръ O этой окружности соединимъ съ вершинами многоугольника,—получимъ AO=BO=CO какъ радіусы окружности, докажемъ что DO=AO. Пусть OH означаетъ перпендикуляръ къ хордѣ BC, слѣдовательно BH=CH (§ 136). Замѣтивъ это, согнемъ чертежъ па линіи OH, причемъ HB пойдетъ по HC, точка B совпадетъ съ C, бокъ BA пойдетъ по CD, ибо, по условію, уголъ ABC=BCD а точка A совпадетъ съ D, ибо, въ слѣдствіе того же условія, бокъ AB=CD, поэтому концы прямой AO совпали съ концами линіи OD слѣдовательно DO=AO. Поэтому окружность, описанная радіусомъ AO, изъ центра O, пройдетъ чрезъ точку D. Имѣя окружность, описанную чрезъ три точки B C и D, докажемъ, точно такимъ же образомъ, что она пройдетъ и чрезъ точку E и т. д

Фиг. 173.

2) Мы доказали, что около правильнаго многоугольника ABCDEI можно описать окружность. Бока этого многоугольника суть хорды окружности и такъ какъ онѣ равны, то и удалены равно отъ центра O; поэтому и перпендикуляры, опущенные изъ центра O на бока многоугольника, равны между собою; слѣдовательно окружность, описанная изъ O, какъ центра, радіусомъ OH, равнымъ длинѣ перпендикуляра, пройдетъ чрезъ ихъ основанія, которыя будутъ точками касанія, а бока — къ ней касательными. И такъ, въ правильномъ многоугольникѣ всегда можно вписать окружность.

§ 181. Общій центръ окружностей, описанной и вписанной въ правильномъ многоугольникѣ, называется *центромъ правильнаго многоугольника*

Апоѳемою правильнаго многоугольника называется радіусъ круга вписаннаго въ этомъ многоугольникѣ; поэтому OH есть апоѳема (фиг. 173).

§ 282. По данному числу сторонъ правильнаго многоугольника всегда можно опредѣлить величину его угла, потому что всѣ его углы равны между собою. И дѣйствительно, пусть n означаетъ число сторонъ правильнаго многоугольника; сумма его угловъ равна $2D(n-2)$ гдѣ D означаетъ прямой уголъ; слѣдовательно каждый уголъ равенъ

$$\frac{2D(n-2)}{n}.$$

Полагая послѣдовательно $n=3$, 4 5 6 ...., найдемъ

уголъ	правильнаго	треугольника	равенъ	$^2/_3D$,
»	»	квадрата	»	D,
»	»	пятисторонника	»	$^6/_5D$
»	»	шестисторонника	»	$^4/_3D$, и т д

§ 283. Изъ предъидущаго видно, что углы правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ равны между собою, хотя бока ихъ могутъ быть и различны, но эти бока во всѣхъ многоугольникахъ пропорціональны вслѣдствіе равенства ихъ въ каждомъ многоугольникѣ, поэтому

Предложеніе

Правильные многоугольники одинаковаго числа угловъ всегда подобны.

§ 284. Уголъ, котораго вершина въ центрѣ правильнаго много угольника, а бока проходятъ чрезъ двѣ смежныя его вершины, называется *центральнымъ угломъ* правильнаго многоугольника.

Если всѣ вершины правильнаго многоугольника соединимъ съ его центромъ, то получится столько равныхъ центральныхъ угловъ, сколько боковъ въ многоугольникѣ; равны же они потому, что равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы. Слѣдовательно величина каждаго центральнаго угла найдется, если четыре прямые угла раздѣлимъ на число боковъ правильнаго многоугольника Отсюда слѣдуетъ, что *въ двухъ правильныхъ многоугольникахъ, одинаковаго числа сторонъ центральные углы равны между собою*

Вопросъ.

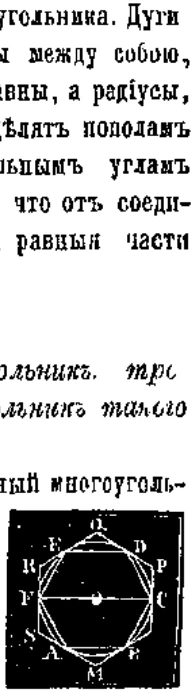
§ 285. *Въ кругъ вписанъ правильный многоугольникъ: требуется въ томъ же кругѣ вписать правильный многоугольникъ съ двойнымъ противъ даннаго числомъ сторонъ*

Изъ центра даннаго многоугольника проведемъ радіусы перпендикулярно его бокамъ, и каждую точку дѣленія окружности соединимъ съ концами соотвѣтствующаго бока: получимъ требуемый многоугольникъ Дѣйствительно, каждому боку даннаго многоугольника соотвѣтствуютъ два бока новаго многоугольника; слѣдовательно число сторонъ послѣдняго вдвое больше противъ числа сторонъ даннаго многоугольника. Дуги соотвѣтствующія бокамъ новаго многоугольника, равны между собою, потому что центральные углы даннаго многоугольника равны, а радіусы, перпендикулярные къ соотвѣтственнымъ имъ хордамъ, дѣлятъ пополамъ эти центральные углы (§ 136)· равнымъ же центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги; а уже извѣстно (§ 279), что отъ соединенія сосѣдственныхъ точекъ дѣленія окружности на равныя части получается правильный многоугольникъ

Вопросъ.

§ 286 *Въ кругъ вписанъ правильный многоугольникъ. требуется около круга описать правильный многоугольникъ такого же числа сторонъ.*

Рѣшеніе 1 е. Пусть ABCDEI вписанный правильный многоугольникъ. Чрезъ вершины его угловъ, въ нихъ окружность раздѣлена на равныя части — проведемъ касательныя къ окружности,—получимъ правильный многоугольникъ MNPQRS (§ 279, предл. 2), число его сторонъ одинаково съ даннымъ, потому что каждому боку перваго соотвѣтствуетъ уголъ втораго



Фиг. 174

Рѣшеніе 2 е. Пусть ABCDLГ — правильный многоугольникъ

Фиг 174

Проведемъ радіусы OM, ON, OP..., перпендикулярно къ бокамъ даннаго многоугольника, а въ точкахъ M, N, P...., касательныя къ окружности: получимъ правильный многоугольникъ A'B'C'D'E'F'; потому что въ точкахъ M, N, P.... окружность раздѣлена на равныя части (§ 279, предл. 2)

Примѣчаніе 1-е Стороны построеннаго такимъ образомъ многоугольника параллельны сторонамъ даннаго· въ самомъ дѣлѣ, радіусъ OM проведенъ перпендикулярно къ AB, и касательная A'B' перпендикулярна къ OM; тоже скажемъ и о прочихъ бокахъ

Примѣчаніе 2-е. Три точки A' A и O лежатъ на одной прямой. Въ самомъ дѣлѣ, соединимъ A' съ O, получимъ два равные треугольника A'OM и A'OG, потому что ипотенуза A'O у нихъ общая и катеты MO=GO, значитъ уголъ MOA =GOA, т. е. прямая AO дѣлитъ уголъ MOG пополамъ, и потому она должна пройти чрезъ точку A составляющую средину дуги GM, и такъ три точки A', A и O лежатъ на одной прямой. Точно также докажется, что линіи B'BO C'CO и т д —всѣ прямыя

Вопросъ.

§ 287. *Около круга описанъ правильный многоугольникъ: требуется вписать въ кругъ правильный многоугольникъ такого же числа сторонъ.*

Рѣшеніе 1. Пусть MNPQRS (см. фиг 172) правильный многоугольникъ, описанный около круга. Соединимъ каждые двѣ сосѣдственныя точки касанія, получимъ требуемый многоугольникъ ABCDEF; докажемъ это

Опустивъ перпендикуляры изъ центра на касательныя, получимъ равные центральные углы (§ 71) а какъ равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги, то окружность въ точкахъ A, B, C.., раздѣлена на равныя части, слѣд· многоугольникъ ABC правильный (§ 279, предл. 1).

Рѣшеніе 2. Пусть A'B'C'D'E'F' (см. фиг 174) описанный правильный многоугольникъ. Проведемъ прямыя изъ точки O къ вершинамъ многоугольника, и соединимъ сосѣдственныя точки пересѣченія A, B, C... этихъ прямыхъ съ окружностью; получимъ правильный вписанный многоугольникъ ABCDEF Въ самомъ дѣлѣ, центральные углы AOB', BOC'... даннаго многоугольника равны между собою а равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги AB, BC, равныя CD...., и такъ окружность въ точкахъ A, B, C...., раздѣлена на части,—слѣдовательно многоугольникъ ABCDEF правильный (§ 279)

Легко доказать, что бока этихъ многоугольниковъ параллельны, въ самомъ дѣлѣ, $A'O=B'O$ и $AO=BO$, слѣдовательно $A'O.AO=B'O.BO$; значитъ хорда AB треугольника $A'OB'$, раздѣляя два бока на части пропорціональныя параллельна третьему боку $A'B'$

Вопросъ

§ 288. *По извѣстнымъ величинамъ радіуса и бока правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, вычислить бокъ описаннаго правильнаго многоугольника такого же числа сторонъ* (фиг. 174).

Пусть бокъ $AB=a$, радіусъ $AO=r$; требуется вычислить бокъ $A'B'$. Вслѣдствіе параллельности прямыхъ $A'B'$ и AB, треугольники $A'B'O$ ABO подобны, поэтому сходственныя ихъ основанія пропорціональны высотамъ (§ 220)

$$A'B':AB=OM:OH$$

отсюда
$$A'B'=\frac{ar}{OH}.$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ AOH, по извѣстнымъ ипотенузѣ r и катету $AH=\frac{a}{2}$, получимъ $OH=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ (§ 232) или $OH=\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2}$,

слѣдовательно
$$A'B'=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

Вопросъ.

§ 289. *По извѣстнымъ величинамъ радіуса и бока правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, найти бокъ вписаннаго же правильнаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ* (фиг. 174),

Пусть $AB=a$ означаетъ бокъ правильнаго многоугольника, радіусъ $AO=r$. Проведя перпендикуляръ OM изъ центра на бокъ AB, получимъ бокъ AM правильнаго вписаннаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ Извѣстно (§ 230), что хорда AM есть средняя пропорціональная между діаметромъ MQ и прилежащимъ отрѣзкомъ MH, слѣдовательно
$$AM^2=MQ\cdot MH$$

$MH=MO-OH$, а посему $OH=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{4r^2-a^2}{2}}$ (§ 288), слѣдова тельно $$AM^2 = 2r\left(r - \frac{\sqrt{4r^2 - r^2}}{2}\right)$$

и $$AM = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - a^2})}$$

---

7 Зависимость отъ радіуса бока шестиугольника, треугольника, квадрата и десятиугольника. Периметры правильныхъ полигоновъ, одного числа угловъ, относятся какъ апоѳемы или какъ радіусы описанныхъ окружностей, а площади этихъ фигуръ какъ квадраты названныхъ линій.

Предложеніе.

§ 290. *Бокъ правильнаго шестиугольника вписаннаго въ кругъ равенъ радіусу этого круга.*

Положимъ, что AB означаетъ бокъ правильнаго шестиугольника вписаннаго въ кругѣ. Центральный уголъ AOB этого многоугольника

Фиг. 173.

равенъ $\frac{4D}{6}$ или $^2/_3D$ (буквою D означается прямой уголъ) (§ 284); слѣдовательно въ треугольникѣ ABO сумма угловъ $A + B = 2D - {}^2/_3D = {}^4/_3D$, а какъ уголъ $A = B$, потому что въ треугольникѣ ABO сторона $AO = BO$, то каждый уголъ A и B, поровнь равенъ также $^2/_3D$. И такъ треугольникъ ABO равносторонній, и бокъ AB равенъ радіусу AO.

Примѣчаніе. Чтобы вписать въ кругѣ правильный шестисторонникъ, надобно вписать послѣдовательно шесть хордъ AB BC CD , равныхъ радіусу.

§ 291. *Слѣдствіе.* Соединивъ чрезъ одну вершины вписаннаго шестисторонника, получимъ правильный треугольникъ ACE, потому что онъ происходитъ отъ соединенія сосѣдственныхъ точекъ дѣленія окружности на три равныя части (§ 279)· дуга $AC = CE = EA$ ибо каждая равна удвоенной дугѣ AB.

Чтобы вычислить бокъ правильнаго треугольника, замѣтимъ, что AOD есть діаметръ, потому что онъ раздѣляетъ окружность пополамъ, слѣдовательно вписанный уголъ ACD будетъ прямой· поэтому изъ прямоугольнаго треугольника ACD получимъ

$$AC^2 = AD^2 - CD^2,$$

назвавъ буквою r радіусъ круга, получимъ

$$AD = 2r,\ CD = r$$

слѣд: $$AC = \sqrt{4r^2 - r^2},$$

отсюда $$AC = r\sqrt{3}.$$

Послѣднее равенство показываетъ, что *бокъ правильнаго треугольника описаннаго въ кругъ равенъ радіусу этого круга, умноженному на* $\sqrt{3}$. Притомъ, отношеніе этихъ величинъ т. е. $\frac{AC}{r} = \sqrt{3}$ есть число несоизмѣримое.

Примѣчаніе. Вписавъ въ кругѣ правильный шестиугольникъ, на основаніи предложенія § 285, получимъ послѣдовательно правильные многоугольники о 12, 24, 48,.. сторонахъ. Числа 3, 6, 12, 24,.. получатся изъ формулы $2^m.3$, когда показатель m сдѣлаемъ послѣдовательно равнымъ 0, 1, 2, 3,..: поэтому, помощію циркуля и линейки, или помощію описанія окружностей и проведенія прямыхъ линій, можно вписать въ данномъ кругѣ правильные многоугольники, которыхъ число равно $2^m.3$; на такое же число равныхъ частей можно раздѣлить окружность.

Правильные многоугольники о 3, 6, 12, 24... сторонахъ могутъ быть описаны около даннаго круга (§ 286).

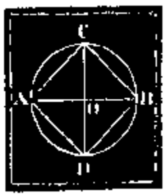
Помощію формулъ, выведенныхъ въ §§ 288 и 289, можно получить бока выше упомянутыхъ многоугольниковъ въ зависимости отъ радіуса.

Предложеніе

§ 292. *Отношеніе бока квадрата, вписаннаго въ кругъ, къ радіусу этого круга, равно квадратному корню изъ числа 2.*

Чтобы вписать квадратъ въ кругѣ, проведемъ два діаметра, взаимно перпендикулярные, AB и CD; такимъ образомъ окружность раздѣлится на четыре равныя части; слѣдовательно, соединивъ точки дѣленія получимъ квадратъ ABCD (§ 279).

Чтобы опредѣлить отношеніе бока AD этого квадрата къ радіусу $AO=r$, возьмемъ квадратъ гипотенузы AD изъ прямоугольнаго треугольника AOD получимъ $AD^2=AO^2+DO^2$, или $AD^2=2r^2$; отсюда



Фиг 175.

$$\frac{AD^2}{r^2}=2 \text{ и } \frac{AD}{r}=\sqrt{2};$$

слѣдовательно $AD=r\sqrt{2}$, т. е. *бокъ квадрата, вписаннаго въ кругъ, равенъ радіусу этого круга, умноженному на* $\sqrt{2}$. Притомъ отношеніе этихъ величинъ есть число несоизмѣримое.

Примѣчаніе. Вписавъ въ кругѣ квадратъ и удваивая число, послѣдовательно получимъ вписанные въ кругѣ и описанные около него правильные многоугольники о 8, 16, 32,.. сторонахъ; числа эти получатся изъ формулы 2^m, когда m положимъ послѣдовательно равнымъ 2, 3, 4...; на столько же равныхъ частей можно раздѣлять окружность.

Предложеніе.

§ 293. *Бокъ правильнаго десятиугольника, описаннаго въ кругъ, равенъ большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*

Пусть AB означаетъ бокъ десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ. Центральный уголъ этого многоугольника равенъ $^4/_{10}$ или $^2/_5$ прямаго (§ 284). Въ треугольникѣ ABO: сумма угловъ $A+B=2-{}^2/_5$ или $^8/_5$ прямаго; слѣдовательно уголъ $A=B={}^4/_5$ прямаго.

Фиг. 175

Раздѣлимъ уголъ BAO пополамъ, получимъ $CAO=CAB={}^2/_5$ прямаго; а въ треугольникѣ ACO внѣшній уголъ $ACB={}^2/_5+{}^2/_5={}^4/_5$ (§ 79). Поэтому въ треугольникѣ ACO бокъ $CO=AC$ а въ треугольникѣ ABC бокъ AC AB (§ 82); слѣдовательно $CO=AB$.

Теперь докажемъ, что радіусъ BO раздѣленъ въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніяхъ и что большій отрѣзокъ равенъ CO. Именно, прямая AC, дѣлящая пополамъ уголъ A, раздѣляетъ противулежащій бокъ на части, пропорціональныя остальнымъ двумъ бокамъ; поэтому $BC{\cdot}CO=AB\ AO$ или $BC{\cdot}CO=CO\ BO$, потому что $CO=AB$ и $AO=BO$.

Примѣчаніе. Соединивъ чрезъ одну вершины правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, получимъ правильный пятиугольникъ; слѣд. въ кругѣ можно вписать и описать около него правильные многоугольники о 5, 10, 20, 40 и т. д ...., сторонахъ, вообще о $2^t\,5$ сторонахъ; на столько же равныхъ частей можно раздѣлить окружность.

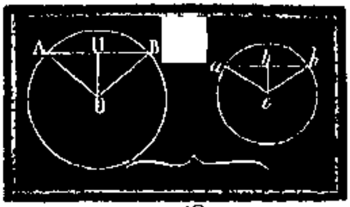
Примѣчаніе. Помощію циркуля и линейки можно вписать въ кругъ правильный пятнадцатиугольникъ.

Въ самомъ дѣлѣ, вычтя изъ дуги, равной [illegible] окружности, дугу равную $^1/_{10}$ окружности, получимъ дугу, равную $^1/_{15}$ окружности; такимъ образомъ окружность раздѣлится на 15-ть равныхъ частей, а хорды, соотвѣтствующія этимъ дугамъ, составятъ правильный вписанный многоугольникъ о 15-ти сторонахъ. Удваивая последовательно число сторонъ этого многоугольника, получимъ правильные вписанные многоугольники о $2^t.15$, когда положимъ $t=0, 1\ 2\ 3$ на это же число равныхъ частей можно раздѣлить окружность.

Предложеніе.

§ 294. *Периметры правильныхъ многоугольниковъ, одинаковаго числа угловъ, пропорціональны апоѳемамъ и радіусамъ круговъ, описанныхъ около этихъ многоугольниковъ, а площади этихъ фигуръ квадратамъ тѣхъ же линій.*

Пусть AB означаетъ сторону правильнаго многоугольника, котораго центръ O, радіусъ круга описаннаго—AO и радіусъ круга вписаннаго или апоөема—OH, полагая, что OH перпендикулярна къ AB. Тѣ же значенія имѣютъ ab, oa и oh въ другомъ правильномъ многоугольникѣ; положимъ так же, что число угловъ одинаковое въ этихъ правильныхъ многоугольникахъ.



Фиг. 177.

1) Намъ уже извѣстно (§ 283), что такіе многоугольники подобны; слѣдовательно, периметры ихъ P и p пропорціональны сходственнымъ сторонамъ AB и ab, т. е

$$P : p = AB : ab.$$

Треугольники ABO и abo подобны между собою, ибо $AO = BO$, $ao = bo$, слѣд. $\frac{AO}{ao} = \frac{BO}{bo}$ и углы между этими боками равны, именно $AOB = aob$ (§ 284); слѣд. сходственныя основанія AB и ab пропорціональны высотамъ, поэтому

$$AB : ab = HO : ho = AO : ao, \text{ и}$$
$$P : p = AO : ao = HO : ho.$$

2) Назвавъ площади этихъ многоугольниковъ буквами Q и q и припомнивъ, что площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ сторонъ, получимъ

$$Q : q = AB^2 : ab^2;$$

но $$AB : ab = AO : ao = HO : ho;$$

слѣд. $$AB^2 : ab^2 = AO^2 : ao^2 = HO^2 : ho^2$$

и $$Q : q = AO^2 : ao^2 = HO^2 : ho^2.$$

— —

8. Понятіе о безконечно-малыхъ величинахъ.—Основная теорема.—Изъ двухъ линій выпуклыхъ, или вогнутыхъ въ одну сторону, обнимающая длиннѣе обнимаемой. — Окружность больше периметра полигона вписаннаго и меньше периметра полигона описаннаго.—Можно вписать въ кругѣ правильный полигонъ, котораго бокъ меньше всякой данной линіи.

§ 295. *Постоянною величиною называется такая величина которая въ продолженіи доказательства какого-либо предложенія или рѣшенія вопроса, сохраняетъ одно и тоже значеніе.* Напро

*

чинъ, *перемѣнною величиною* называется такая величина, которая, при тѣхъ же обстоятельствахъ, измѣняется. Напримѣръ, перпендикуляръ опущенный изъ данной точки на прямую — постоянная величина, а наклонныя, проводимыя изъ этой точки, будутъ величины перемѣнныя Смежные углы—перемѣнныя величины, а сумма ихъ—величина постоянная: она всегда равна двумъ прямымъ. Когда треугольникъ данъ, то стороны его и углы постоянныя величины, хорды же этого треугольника—величины перемѣнныя; для даннаго круга, радіусъ и діаметръ—постоянныя величины, а хорды—величины перемѣнныя, и т. п

§ 296. *Безконечно-малою величиною называется такая перемѣнная величина, которая можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины, какъ бы мала ни была эта послѣдняя.* Здѣсь надобно обратить вниманіе на то, что безконечно-малая величина есть величина перемѣнная, такъ что каков бы малое число мы ни вообразили, напримѣръ—одну милліонную дюйма, оно не будетъ безконечно-малое а только будетъ весьма малая дробь и—величина постоянная. Безконечно малая величина можетъ быть означена только буквою, а не цифрами

§ 297. *Произведеніе безконечно малаго количества на постоянное число есть безконечно-малое количество*

Пусть α означаетъ безконечно малое, а p—постоянное; докажемъ что произведеніе $p\alpha$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества,—этимъ докажется, что $p\alpha$ есть безконечно малое. Возьмемъ какую нибудь дробь $\frac{1}{n}$. По условію количество α можно сдѣлать меньше всякаго даннаго числа слѣд можно положить что

$$\alpha<\frac{1}{pn};$$

умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное число p получимъ

$$p\alpha<\frac{1}{n}.$$

И такъ p можно сдѣлать меньше всякой данной дроби слѣд это произведеніе есть безконечно-малое количество.

§ 298. Пусть A и B означаютъ два постоянныя количества, α и β—два безконечно-малыя количества: докажемъ что равенство

$$A+\alpha=B+\beta \quad \ldots \quad (1)$$

необходимо влечетъ равенство постоянныхъ A и B, т. е. что $A=B$.

Допустимъ что количества A и B неравны между собою пусть

$A > B$ и $A - B = k$, гдѣ разность k должно быть постоянное количество, ибо A и B постоянныя. Перенесеніемъ членовъ въ уравненіи (1) изъ одной части въ другую, получимъ

$$A - B = \beta - \alpha$$

или

$$k = \beta - \alpha,$$

отсюда

$$\beta = k + \alpha;$$

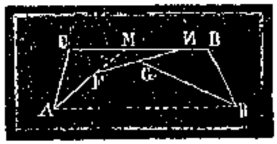
и такъ количество β состоитъ изъ постояннаго k и безконечно-малаго α слѣд. β не можетъ быть сдѣлано меньше количества k, значитъ β не безконечно-малое, ибо свойство безконечно-малаго состоитъ въ томъ, что оно можетъ быть сдѣлано меньше всякаго даннаго,—такое заключеніе противно условію, по которому β есть безконечно-малое; значитъ нельзя допустить, что A неравно B, поэтому $A = B$.

§ 299. *Выпуклою* или *вогнутою* линіею называется такая линія, которую прямыя линіи, проводимыя въ произвольныхъ направленіяхъ, пересѣкаютъ не больше какъ въ двухъ точкахъ.

Предложеніе

§ 300. *Изъ двухъ линій выпуклыхъ, или вогнутыхъ въ одну сторону, обнимающая длиннѣе обнимаемой* *)

1) *Когда обѣ выпуклыя линіи ломанныя.*



Фиг. 178

Требуется доказать, что ломанная ACDB больше ломанной AFGB. Продолжимъ бока AF и FG до пересѣченія съ обнимающею ломанною въ точкахъ M и N. Такъ какъ прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками то

$$AC + CM > AF + FM,$$
$$FM + MN > FG + GN,$$
$$GN + ND + DB > BG.$$

Сложимъ эти неравенства по частямъ, при чемъ замѣнимъ $CM + MN + ND$ на CD и сократимъ въ обѣихъ частяхъ равныя количества FM а также GN, получимъ

$$AC + CD + DB > AF + FG + BG$$

или ломанная $ACDB >$ лом. AFGB.

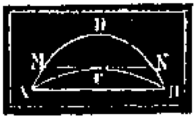
2) *Когда обѣ выпуклыя линіи—кривыя.*

Надобно доказать, что выпуклая линія ACB меньше всякой объ-

*) Одна линія обнимаетъ другую, если обѣ линіи находятся по одну сторону прямой, соединяющей общіе концы этихъ линій.

емлющея ее кривой проведенной между точками A и B по одну сторону прямой AB

Очевидно, что въ числѣ множества линій, объемлющихъ линію ACB и имѣющихъ общія двѣ точки A и B, должна быть одна наименьшая линія, т. е. такая, которая меньше всѣхъ прочихъ, поэтому, если докажемъ, что для всякой выпуклой линіи ADB, объемлющей линію ACB, всегда найдется линія меньшая линіи ADB, то отсюда заключимъ, что линія ACB наименьшая. Проведемъ прямую MN между линіями ACB и ADB, такъ, чтобы она не пересѣкла линію ACB; эта прямая встрѣтитъ линію ADB въ двухъ точкахъ M и N и будетъ меньше части кривой MDN (§ 8) т. е. MN<MDN; а придавъ къ обѣимъ частямъ этого неравенства по AM и по BN, получимъ AM+MN+NB<ADB



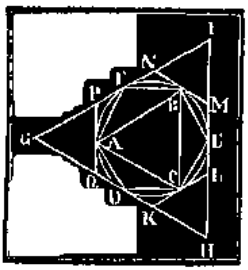
Фиг. 179

Примѣчаніе. Тоже доказательство и въ томъ случаѣ, когда одна линія объемлемая или объемлющая, будетъ ломанная, а другая—кривая.

Предложеніе

§ 301. *Окружность больше периметра многоугольника вписаннаго и меньше периметра полигона описаннаго; притомъ вписанные периметры съ удвоеніемъ числа боковъ увеличиваются, а описанные периметры уменьшаются*

1) Пусть ABC означаетъ многоугольникъ, вписанный въ кругѣ, а GIH описанный полигонъ. Каждый изъ боковъ вписаннаго многоугольника меньше соотвѣтствующей ему дуги слѣдовательно



Фиг. 180.

AB<дуги AB

BC<дуги BC,

AC<дуги AC.

Складывая эти неравенства, найдемъ периметръ вписаннаго многоугольника меньше окружности.

Дуга окружности есть выпуклая линія, потому что прямая линія пересѣкаетъ окружность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ (§ 140), поэтому, на основаніи предъидущаго предложенія,

дуга DAF<лом. DGF,

дуга FBE<лом. FIE,

дуга ECD<лом. EHD

Сложивъ эти неравенства, найдемъ что окружность меньше периметра описаннаго многоугольника GHI.

2) Докажемъ, что съ удвоеніемъ числа сторонъ периметры вписанныхъ многоугольниковъ увеличиваются, а описанныхъ — уменьшаются, по данному многоугольнику ABC впишемъ многоугольникъ ADCEBF съ удвоеннымъ числомъ боковъ, и опишемъ ему подобный KLMNPQ.

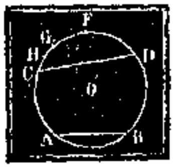
Каждый бокъ многоугольника ABC меньше суммы соотвѣтствующихъ ему двухъ боковъ многоугольника ADCEBF; слѣдовательно периметръ перваго многоугольника меньше периметра втораго многоугольника т. е. периметры вписанныхъ многоугольниковъ увеличиваются съ удвоеніемъ числа боковъ.

Бока KL, MN и PQ *описаннаго многоугольника меньше* соотвѣтственныхъ имъ ломанныхъ LHK, MIN и PGQ; остальные же бока перваго многоугольника составляютъ остальныя части периметра многоугольника HGI; слѣдовательно первый периметръ меньше втораго, т. е съ увеличеніемъ числа боковъ описаннаго многоугольника периметръ уменьшается

Предложеніе

§ 302 *Можно вписать въ кругъ правильный полигонъ котораго бокъ будетъ меньше всякой данной линіи.*

Пусть AB означаетъ данную прямую, и требуется вписать правильный полигонъ, котораго бокъ былъ бы меньше AB. Впишемъ въ кругѣ какой нибудь правильный многоугольникъ, и положимъ что CD означаетъ его бокъ. Пусть дуга CD больше дуги AB. Раздѣлимъ дугу CD пополамъ, въ точкѣ F (§ 177); потомъ раздѣлимъ пополамъ дугу CF въ точкѣ G; потомъ пополамъ дугу CG, въ точкѣ H



Фиг. 181.

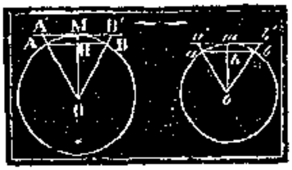
и т. д. Такъ какъ будемъ получать все дуги меньшія и меньшія, то очевидно дойдемъ до такой дуги, напр CH, которая будетъ меньше дуги AB; слѣд: и хорда CH будетъ меньше хорды AB и она выразитъ бокъ правильнаго многоугольника вписаннаго въ кругѣ (§ 279)

Предложеніе

§ 303. *Можно въ кругъ вписать и описать около него правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ которыхъ* *разность периметровъ, а также и площадей будетъ меньше всякой данной величины.*

1) Пусть P и P' означаютъ периметры правильныхъ многоугольниковъ, съ одинаковымъ числомъ боковъ, именно, P—периметръ вписаннаго многоугольника, а P' описаннаго около окружности, AB и $A'B'$ означаютъ ихъ стороны OM и OH—апоѳемы этихъ многоугольниковъ.

Извѣстно, что периметры правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ пропорціональны апоѳемамъ; слѣдовательно



Фиг. 182.

$$P' : P = OM : OH,$$

отсюда $\frac{P'-P}{P'} = \frac{OM-OH}{OM}$;

но $OM - OH = MH$,

слѣд: $\frac{P'-P}{P'} = \frac{MH}{OM}$,

отсюда $P'-P = MH \times \frac{P'}{OM}$

Перпендикуляръ MH меньше наклонной AM, а эта послѣдняя есть бокъ правильнаго многоугольника, слѣд. можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины, если только произвольно удваивать число боковъ; поэтому MH есть безконечно-малое. Въ произведеніи $MH \times \frac{P'}{OM}$ множитель $\frac{P'}{OM}$ есть величина уменьшающаяся, ибо периметръ P' описаннаго многоугольника, съ увеличеніемъ числа боковъ, уменьшается, а радіусъ OM—постоянная; другой множитель MH есть безконечно-малая, слѣд. произведеніе будетъ безконечно-малое (§ 297). Итакъ вторая часть послѣдняго равенства, а слѣд. и разность периметровъ $P'-P$ можно сдѣлать меньше всякой данной величины если удваивать число боковъ полигоновъ, вписаннаго и описаннаго.

2) Пусть Q' и Q означаютъ площади упомянутыхъ многоугольниковъ. Отношеніе ихъ равно отношенію квадратовъ апоѳемъ (§ 294) слѣд

$$Q' : Q = OM^2 : OH^2;$$

отсюда $$\frac{Q'-Q}{Q'} = \frac{OM^2-OH^2}{OM^2}$$

Изъ прямоугольнаго треугольника AHO имѣемъ $AH^2 = AO^2 - OH^2$ или $\frac{1}{4}AB^2 = OM^2 - OH^2$, потому что $AH = \frac{1}{2} AB$ и $AO = OM$ вслѣдствіе этого равенства, предъидущая пропорція обратится въ

$$\frac{Q'-Q}{Q'} = {}^1/_4 \frac{AB^2}{OM^2};$$

отсюда
$$Q'-Q = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \times \frac{Q'}{OM^2}.$$

Въ кругѣ можно вписать правильный многоугольникъ, котораго бокъ AB будетъ меньше всякой данной величины; слѣдовательно множитель $({}^1/_2 AB)^2$ будетъ меньше всякой данной величины; а какъ съ увеличеніемъ числа сторонъ описаннаго многоугольника, Q' уменьшается, а радіусъ MO—постояненъ, то другой множитель $\frac{Q'}{OM^2}$ будетъ уменьшаться слѣдовательно произведеніе, а вмѣстѣ съ тѣмъ и разность площадей $Q'-Q$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

§ 304 *Слѣдствіе.* Такъ какъ окружность больше периметра вписаннаго въ ней полигона и меньше описаннаго полигона, то *всегда можно въ кругѣ описать или около него описать такой правильный полигонъ, котораго периметръ будетъ разниться отъ окружности на безконечно-малое.*

Площадь круга заключается между площадями многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго около круга, слѣд. *всегда можно въ кругѣ вписать или около него описать правильный многоугольникъ, который будетъ разниться отъ площади круга на безконечно-малое*

) Окружности относятся какъ ихъ радіусы.—Площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ —Площади круговъ относятся какъ квадраты радіусовъ Подобныя дуги относятся какъ радіусы.—Кругъ, построенный на гипотенузѣ равномѣренъ суммѣ круговъ, построенныхъ на катетахъ.

Предложеніе

§ 305 *Окружности пропорціональны ихъ радіусамъ.*

Пусть C и c означаютъ окружности двухъ круговъ, R и r—ихъ радіусы надобно доказать, что $\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$.

Около круговъ опишемъ правильные полигоны одинаковаго числа боковъ, слѣд. подобные, и вообразимъ, что число ихъ боковъ постепенно удвоивается; черезъ постепенное удвоеніе необходимо получимъ такіе многоугольники которыхъ периметры будутъ разниться отъ окружно стей на количество безконечно малое (§ 304). Назовемъ въ этихъ последнихъ многоугольникахъ буквою P периметръ многоугольника, описаннаго около окружности C, а буквою p —периметръ многоугольника, описаннаго около c и подобнаго первому, то $P = C + \alpha$, $p = c + \beta$, гдѣ α и β суть количества безконечно-малыя. Такъ какъ периметры правильныхъ полигоновъ одинаковаго числа сторонъ пропорціональны апоѳемамъ (т. е. радіусамъ вписанныхъ круговъ), то

$$\frac{P}{R} = \frac{p}{r} \text{ или } \frac{C+\alpha}{R} = \frac{c+\beta}{r}$$

последнее равенство можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{C}{R} + \frac{\alpha}{R} = \frac{c}{r} + \frac{\beta}{r};$$

здѣсь $\frac{\alpha}{R}$ и $\frac{\beta}{r}$ суть безконечно-малыя, а $\frac{C}{R}$ и $\frac{c}{r}$ — постоянныя то на основаніи § 298 эти постоянныя равны между собою т. е.

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}.$$

§ 306. *Примѣчаніе.* Если въ кругѣ впишемъ правильный многоугольникъ и будетъ удвоивать число боковъ, то бока этихъ многоугольниковъ будутъ уменьшаться и могутъ сдѣлаться меньше всякой данной величины (§ 302), а периметры будутъ приближаться къ окружности (§ 303). Основываясь на этомъ замѣчаніи, *окружность принимаютъ за периметръ правильнаго многоугольника о безконечномъ числѣ боковъ.* При такомъ новомъ взглядѣ на окружность, должно приписать ей всѣ тѣ свойства правильныхъ многоугольниковъ, которыя не зависятъ отъ числа боковъ. Напр. периметры правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ, одинаковаго числа боковъ, пропорціональны радіусамъ круговъ, притомъ пропорціональность эта имѣетъ мѣсто при *всякомъ числѣ боковъ*, т. е. она не зависитъ отъ числа боковъ; а какъ окружности можно принять за правильные полигоны о безконечномъ числѣ боковъ то окружности пропорціональны радіусамъ.

§ 307. *Слѣдствіе.* Пусть C и c означаютъ окружности, а R и r соотвѣтственные имъ радіусы мы доказали что

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$$

отсюда

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$$

значитъ отношеніе окружности круга къ своему діаметру во всѣхъ кругахъ одинаково, или: *отношеніе окружности къ діаметру —*

постоянная величина. Отношеніе это принято означать греческою буквою π; слѣдовательно $\frac{C}{2R}=\pi$.

Изъ послѣдняго равенства находимъ

$$C=2\pi R,$$

т. е. *длина окружности равна ея діаметру, умноженному на отношеніе окружности къ діаметру.*

Легко понять, что π больше 3 и меньше 4. Положивъ $R=1$, получимъ $^1/_2\, C=\pi$. Окружность C больше периметра правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, а онъ равенъ 6-ти, потому что бокъ этого многоугольника равенъ радіусу или 1-цѣ, съ другой стороны,— окружность меньше периметра описаннаго квадрата, бокъ же этого квадрата равенъ діаметру 2, слѣдовательно периметръ его равенъ 8. Итакъ

$$C \begin{matrix} >6, \\ <8; \end{matrix} \text{ отсюда } \frac{C}{2} \text{ или } \pi \begin{matrix} >3 \\ <4. \end{matrix}$$

Замѣтимъ, что число π несоизмѣримое, слѣдовательно можетъ быть вычислено только по приближенію; въ послѣдствіи объяснится возможность вычисленія π съ желаемою точностью (см. § 317).

Предложеніе.

§ 308. *Площадь круга равна окружности, умноженной на половину радіуса.*

Пусть S означаетъ площадь круга, а C и R его окружность и радіусъ; надобно доказать, что $S=C\times\frac{R}{2}$, т. е. чтобы найти число квадратныхъ единицъ, напр. квадратныхъ дюймовъ, содержащихся въ площади круга, надобно найти число дюймовъ, содержащихся въ окружности C и радіусѣ R, потомъ числа эти перемножить и взять половину произведенія, потому что равенство $S=C\times\frac{R}{2}$ есть сокращенное выраженіе слѣдующаго равенства (§ 254)

$$\frac{S}{1}=\frac{C}{1}\cdot\frac{^1/_2R}{1}.$$

Опишемъ правильный полигонъ около круга, пусть Q означаетъ его площадь, а P —периметръ, радіусъ R будетъ апоѳемою этого многоугольника, слѣд. (§ 267)

$$Q=P.\frac{R}{2},$$

намъ извѣстно, что удвоивая число боковъ этого многоугольника разность между площадями Q и S а также и между периметромъ P и окружностью C можетъ быть сдѣлана въ обоихъ случаяхъ меньше всякой данной величины; слѣд. можно положить

$$Q=S+\alpha,\ P=C+\beta,$$

гдѣ α и β—безконечно малыя. Вставивъ эти величины въ равенство $Q=P\times\frac{R}{2}$ получимъ

$$S+\alpha=C\frac{R}{2}+\beta\frac{R}{2}.$$

Здѣсь S и $C\times\frac{R}{2}$ суть постоянныя числа, α и $\beta\times\frac{R}{2}$—безконечно малыя (§ 297) а такое равенство влечетъ равенство постоянныхъ, слѣд

$$S=C\times\frac{R}{2}.$$

Слѣдствіе Такъ какъ $C=2\pi R$, то

$$S=2\pi R.\frac{R}{2} \text{ или } S=\pi R^2$$

§ 309. *Примѣчаніе.* Выраженіе для площади круга можно получить несравненно проще, если согласно замѣчанію, изложенному въ § 306, *примемъ окружность за периметръ многоугольника о безконечномъ числѣ боковъ* и слѣд. кругъ примемъ за правильный многоугольникъ о безконечномъ числѣ боковъ. Дѣйствительно, площадь правильнаго многоугольника равна его периметру, умноженному на половину апоѳемы (§ 267), потому что этотъ многоугольникъ можно принимать описаннымъ около даннаго круга, притомъ выраженіе это, служащее для измѣренія площади правильнаго полигона, не зависитъ отъ числа его боковъ, то можемъ заключить, что и площадь круга равна окружности, умноженной на половину радіуса.

§ 310. Въ послѣдствіи, для сокращенія разсужденій будемъ принимать кругъ за площадь правильнаго многоугольника о безконечномъ числѣ боковъ, а окружность—за периметръ, и тѣ свойства правильныхъ многоугольниковъ, которыя не зависятъ отъ числа боковъ будемъ распространять на кругъ и окружность.

Но съ другой стороны, такъ какъ окружность въ сущности не есть ломанная, то чтобы не оставить въ читателѣ какого либо сомнѣнія, мы будемъ приводить доказательства строгія, на основаніи предложенія, по которому равенство

$$A+\alpha=B+\beta,$$

гдѣ α и β безконечно-малыя, а A и B—постоянныя влечетъ равенство постоянныхъ, A—B. Выводы эти будемъ печатать мелкимъ шрифтомъ, ихъ можно пропустить не нарушая послѣдовательности въ изложеніи.

Предложеніе.

§ 311 *Площади круговъ пропорціональны квадратамъ радіусовъ*

Пусть S и s означаютъ площади двухъ круговъ; C и c—ихъ окружности; а R и r —радіусы. Извѣстно (§ 308), что

$$S=C\times\frac{R}{2},$$

$$s=c\times\frac{r}{2},$$

отсюда раздѣляя первое равенство на второе получимъ

$$\frac{S}{s}=\frac{C}{c}\times\frac{R}{r}$$

Но окружности пропорціональны радіусамъ т е

$$\frac{C}{c}=\frac{R}{r};$$

вставивъ, вмѣсто перваго изъ этихъ отношеній, ему равное въ предпослѣднее равенство получимъ

$$\frac{S}{s}=\frac{R}{r}\times\frac{R}{r}\text{ или }\frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2}.$$

Пусть D и d означаютъ діаметры круговъ; такъ какъ діаметръ вдвое больше радіуса, то $D:d=R:r$ и $D^2:d^2=R^2:r^2$, слѣдовательно $\frac{S}{s}=\frac{D^2}{d^2}$, т е *площади круговъ пропорціональны квадратамъ діаметровъ*

Предложеніе

§ 312. *Площади секторовъ одного и того же круга или круговъ, описанныхъ равными радіусами, пропорціональны соотвѣтственнымъ имъ дугамъ.*

Предложеніе это есть прямое слѣдствіе теоремы о пропорціональности величинъ (§ 201); въ самомъ дѣлѣ, въ 1-хъ съ увеличеніемъ дуги увеличивается соотвѣтствующій ей секторъ, во 2-хъ, если дуга увеличится въ 2, 3, и т. д. раза, то и соотвѣтствующій секторъ увеличится во столько же разъ, потому, что секторы одного круга, соотвѣтствующіе равнымъ дугамъ, очевидно, совмѣщаются.

Предложенie

§ 313. *Площадь сектора равна соотвѣтствующей дугѣ, умноженной на половину радiуса.*

Пусть A означаетъ площадь сектора a—соотвѣтствующую ему дугу R—радiусъ надобно доказать, что $A = a \times \frac{R}{2}$

Означимъ буквами S и C соотвѣтственно площадь круга и окружность, описанную тѣмъ же радiусомъ R. Сравнимъ секторъ A съ секторомъ $\frac{S}{4}$, этому послѣднему сектору будетъ соотвѣтствовать дуга $\frac{C}{4}$ т. е. центральный уголъ сектора будетъ прямой На основанiи предъидущаго предложенiя получимъ

$$A : \frac{S}{4} = a : \frac{C}{4}$$

отсюда
$$A = a . \frac{S}{C}$$

но намъ извѣстно, что площадь круга

$$S = C \frac{R}{2}$$

поэтому
$$A = a . \frac{R}{2}.$$

§ 314. *Дуги круга называются подобными если соотвѣтственные имъ центральные углы равны между собою.*

Предложенie

315 *Подобныя дуги пропорцiональны радiусамъ.*

Пусть A и a означаютъ дуги, заключающiяся между боками угла M и описанныя радiусами R и r, пусть C и c означаютъ окружности, описанныя этими радiусами. Извѣстно, что центральные углы одного и того же круга пропорцiональны соотвѣтственнымъ имъ дугамъ, поэтому, назвавъ буквою D прямой уголъ, которому соотвѣтствуетъ въ первомъ кругѣ дуга $\frac{1}{4}C$, а во второмъ $\frac{1}{4}c$, получимъ

$$\text{уголъ } M : D = \text{дуг. } A . \tfrac{1}{4} C$$
$$\text{и уголъ } M \cdot D = \text{дуг. } a : \tfrac{1}{4} c$$

по равенству первыхъ отношенiй этихъ пропорцiй, получимъ

$$\text{дуг.}A \cdot \tfrac{1}{4}C = \text{дуг.}a . \tfrac{1}{4} c;$$

отсюда
$$\text{дуг.}A : \text{дуг.}a = C : c;$$

но окружности пропорцiональны радiусамъ т е $C \cdot c = R \ r$, поэтому

$$\frac{\text{дуг. } A}{\text{дуг. } a} = \frac{R}{r}.$$

Примѣчаніе. Секторы называются подобными, если соотвѣтствующіе имъ центральные углы равны между собою.

Площади подобныхъ секторовъ пропорціональны квадратамъ радіусовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, назвавъ буквами S, A и R площадь сектора дугу (основаніе) и радіусъ, а буквами s, a и r такія же величины другаго сектора, подобнаго первому, получимъ

$$S = A \times \frac{R}{2} \text{ и } s = a \times \frac{r}{2}$$

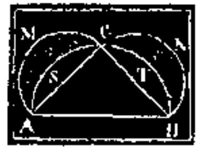
отсюда
$$\frac{S}{s} = \frac{A}{a} \times \frac{R}{r},$$

а въ слѣдствіе подобія дугъ, имѣемъ $\frac{A}{a} = \frac{R}{r}$,

значитъ
$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{A^2}{a^2}.$$

Предложеніе

§ 316. *Кругъ, построенный на гипотенузѣ равномѣренъ суммѣ круговъ, построенныхъ на катетахъ.*



Фиг. 183.

Принявъ бока прямоугольнаго треугольника ABC за діаметры, опишемъ круги; для краткости пусть Q P и R означаютъ площади круговъ, которыхъ діаметры соотвѣтственно равны AB, BC и AC. Круги пропорціональны квадратамъ діаметровъ а потому повторивъ разсужденія § 272 имѣемъ

$$P : R = BC^2 : AC^2,$$

отсюда
$$(P+R) : R = (BC^2 + AC^2) : AC^2,$$

но и
$$Q : R = AB^2 : AC^2;$$

въ этихъ двухъ пропорціяхъ три члена одной равны тремъ членамъ другой, слѣдовательно и остальные члены равны, т. е. $Q = P + R$.

Примѣчаніе. Изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ, что полукругъ ASCTB равномѣренъ суммѣ полукруговъ AMC и CNB; отнявъ отъ обѣихъ частей общіе имъ сегменты ASC и BTC, найдемъ, что треугольникъ ABC равномѣренъ суммѣ луночекъ AMCSA и BNCTB

Луночки эти называются *гиппократовыми*, по имени греческаго геометра, жившаго въ V вѣкѣ до Р. Х. который первый доказалъ это свойство.

---

10. Показать возможность вычисленія по приближенію отношенія окружности къ діаметру. — По данному радіусу, найти окружность и площадь круга; по данной окружности или по данной площади круга найти радіусъ.

Вопросъ.

§ 317. *Показать возможность вычисленія по приближенію отношенія окружности къ діаметру.*

Мы уже замѣтили, что отношеніе окружности къ діаметру (принято обозначать его буквою π) есть постоянная величина для всѣхъ круговъ; поэтому для отысканія отношенія окружности къ діаметру достаточно изъ всѣхъ круговъ выбрать одинъ и найти въ немъ это отношеніе. Изберемъ кругъ, въ которомъ радіусъ равенъ единицѣ и отыщемъ въ немъ отношеніе окружности къ діаметру, т. е. π. Для такого круга отношеніе окружности къ діаметру будетъ (§ 307).

$$\pi = \frac{C}{2} \qquad (1).$$

Это равенство показываетъ, что для нахожденія π надо найти длину окружности и раздѣлить ее на 2.

Для отысканія длины окружности отыскиваютъ периметры подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго около круга, и съ этою цѣлью пользуются формулами §§ 288 и 289.

При радіусѣ $r=1$ формула, опредѣляющая бокъ описаннаго правильнаго многоугольника по данному боку a вписаннаго подобнаго ему многоугольника (§ 288), обратится въ

$$\frac{2a}{\sqrt{4-a^2}} \ldots (2)$$

а формула, опредѣляющая, по данному боку a, вписаннаго правильнаго многоугольника, бокъ вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго вдвое больше сторонъ (§ 289), обратится въ

$$\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}} \qquad (3)$$

Теперь впишемъ въ кругѣ, котораго радіусъ 1 ца, правильный шестистороннікъ —бокъ его равенъ 1-цѣ, а периметръ 6-ти и опишемъ подобный ему многоугольникъ. Бокъ этого многоугольника найдется по формулѣ (2), полагая $a=1$ а умноживъ его на 6-ть, получимъ периметръ описаннаго правильнаго шестистороннинка.

Положивъ $a=1$; въ формулѣ (3), получимъ бокъ, а отсюда и периметръ правильнаго двѣнадцатистороннинка вписаннаго въ кругѣ Вставивъ во (2) формулу найденную такимъ образомъ величину для бока вписаннаго 12-ти-стороннинка, получимъ бокъ, а слѣдовательно и периметръ правильнаго 12-ти стороннинка описаннаго.

Продолжая такое постепенное вычисленіе, найдемъ периметры правильныхъ 24-хъ-стороннинковъ, вписаннаго и описаннаго, потомъ периметры 48 96 и т д стороннинковъ правильныхъ, вписаннаго и описаннаго; и какъ всегда можно найти такіе правильные многоугольники одинаковаго числа боковъ, одинъ вписанный, другой описанный, что разность между ихъ периметрами можно сдѣлать менѣе всякой данной величины (§ 303), то эту разность можно сдѣлать напримѣръ меньше $^1/_{100}$, чего мы достигнемъ, когда у обоихъ периметровъ будутъ одинаковыя цифры цѣлыхъ, десятыхъ и сотыхъ Окружность С заключается между этими периметрами,—она больше вписаннаго и меньше описаннаго (§ 304); слѣдовательно разность между окружностью и каждымъ периметромъ будетъ меньше $^1/_{100}$; поэтому общія цифры периметровъ составятъ приближеніе окружности С съ точностію до $^1/_{100}$; но $\pi = \frac{C}{2}$, отсюда слѣдуетъ что, раздѣливъ это приближеніе на 2 получимъ π съ точностью до $^1/_{100}$ Такимъ образомъ возможно вычислить π съ какою угодно точностью

Примѣчаніе 1. До *Архимеда* не было вычислено отношеніе окружности къ діаметру: онъ нашелъ, что π заключается между $3^{10}/_{70}$ и $^{10}/_{71}$ или по приведеніи дробей къ одному знаменателю, между $3\ ^{71}/_{497}$ и $3^{70}/_{497}$; и такъ $3^1/_7$ или $^{22}/_7$ составляетъ приближеніе π, съ точностію до $^1/_{497}$ и больше настоящей величины.

Адріанъ Мецій нашолъ болѣе точную величину $^{355}/_{113}$

Примѣчаніе 2. На основаніи высшаго анализа, вычисленіе π доведено до 530 десятичныхъ знаковъ; изъ нихъ 330 цифръ можно считать вѣрными, потому что онѣ вышли одинаковыми у трехъ математиковъ *). Вотъ первыя десять цифръ $\pi = 3{,}1415926535\ldots$

*) См *Nouvelles annales de mathématique* par Terquem 1856.

Обративъ архимедово отношеніе $\frac{22}{7}$ и Меціево $^{355}/_{113}$ въ десятичныя дроби и сравнивъ ихъ съ вышеприведеннымъ приближеніемъ, выраженнымъ въ десятичныхъ доляхъ, найдемъ, что $^{22}/_{7}$ и $^{355}/_{113}$ больше π, первое точно до сотой а второй до милліонной доли.

Объ отношеніяхъ Архимеда и Меція упоминаемъ, какъ замѣчательныхъ въ исторіи математики; для вычисленія же всегда берется приближеніе въ десятичныхъ доляхъ, ограничиваясь однимъ, двумя, тремя и т. д. десятичными знаками смотря по цѣли вычисленія.

Вопрос

§ 318 *П данному радіусу найти окружности и площадь круга.*

1) Пусть радіусъ R извѣстенъ въ линейныхъ единицахъ, напримѣръ въ дюймахъ; требуется найти число дюймовъ, содержащихся въ окружности C, или, что то же, требуется измѣрить окружность. Извѣстно что отношеніе окружности C къ діаметру 2R равно π т. е.

$$\frac{C}{2R}=\pi,\ \text{отсюда}\ C=2\pi R\qquad .\ (1).$$

Въ послѣдней формулѣ извѣстно R, по условію; π также извѣстно. слѣдовательно, найдется $2\pi R$, или длина окружности C. Разумѣется, вычисленіе можетъ быть произведено только по приближенію.

2) Пусть S означаетъ площадь круга Извѣстно, что площадь круга равна окружности, умноженной на половину радіуса; слѣдовательно

$$S=C\ .\ \frac{R}{2}$$

Вставивъ сюда $2\pi R$ вмѣсто C и сократив множитель 2 въ числителѣ и знаменателѣ, получимъ

$$S=\pi R^2.\ .\qquad .\ .\ .\ (2)$$

По этой формулѣ найдется площадь круга, если извѣстенъ радіусъ R, и здѣсь вычисленіе можно произвесть только по приближенію *)

Вопрос

§ 319. *По данной окружности, или по данной площади круга,—найти радіусъ.*

1) Пусть извѣстна въ линейныхъ единицахъ длина окружности C Изъ формулы (1) предъидущаго параграфа, найдемъ радіусъ

---

*) См. мою Ариѳметику отдѣлъ о приближеніяхъ

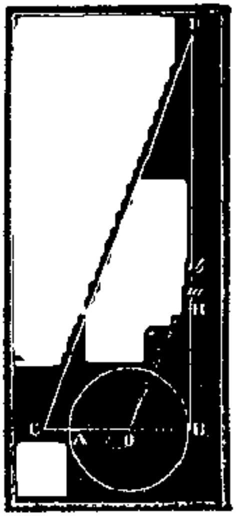
$$R=\frac{C}{2\pi},$$

потому что π извѣстно.

2) Положимъ, что извѣстна площадь круга S. Изъ (2) формулы предъидущаго параграфа найдемъ радіусъ

$$R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Примѣчаніе 1. Чтобы графически опредѣлять длину окружности, конечно, по приближенію, проведемъ чрезъ какую нибудь точку B окружности діаметръ BA и касательную BD. Отложимъ BH равное діаметру, потомъ Ha и Hb соотвѣтственно равныя $\frac{1}{5}$ и $\frac{3}{5}$ радіуса; слѣдовательно, принявъ радіусъ за 1-цу, получимъ $Ba=\frac{11}{5}$, $Bb=\frac{13}{5}$. Точки a и b соединимъ съ центромъ O, отложимъ $BC=Oa$, наконецъ чрезъ точку C проведемъ CD параллельно Ob до пересѣченія съ касательною въ точкѣ D: *прямая BD выражаетъ приблизительно длину окружности*, съ точностью до одной чотысячной доли радіуса.



Фиг. 483

Въ самомъ дѣлѣ, изъ прямоугольнаго треугольника BOa,

$$Oa=\sqrt{BO^2+Ba^2}=\sqrt{1+\tfrac{121}{25}}=\tfrac{1}{5}\sqrt{146}$$

слѣдовательно $BC=\frac{1}{5}\sqrt{146}$.

Въ треугольникѣ BCD хорда Ob параллельна одному боку, поэтому,

$$\frac{BD}{BC}=\frac{Bb}{BO},\quad \text{отсюда}\quad BD=\tfrac{13}{25}\sqrt{146}.$$

и

$$\frac{BD}{2}=\tfrac{13}{50}\sqrt{146}=0{,}26\sqrt{146}$$

Но

$$\sqrt{146}=12{,}0830459,$$

слѣд. $0{,}26\sqrt{146}=3{,}1415919$ вѣрно до $\frac{1}{10^7}$,

поэтому $\frac{BD}{2}=3{,}141592$ вѣрно до $\frac{1}{10^6}$, а извѣстно, что $\pi=3{,}1415926\ldots\ldots$

Итакъ $\frac{BD}{2}$ выражаетъ половину окружности съ точностью до одной милліонной радіуса, не принимая въ расчетъ погрѣшностей отъ черченія.

Примѣчаніе 2. Пусть x означаетъ бокъ квадрата равномѣрнаго площади круга, слѣд.

$$x^2=C\times\frac{R}{2}$$

отсюда

$$C:x=x:\frac{R}{2}.$$

Итакъ, чтобы кругъ обратить въ равномѣрный ему квадратъ, надобно найти среднюю пропорціональную между окружностью и половиною радіуса, но окружность C опредѣляется не иначе какъ по приближенію, слѣд. и бокъ квадрата найдется только по приближенію. Итакъ вопросъ о замѣненіи круга, равномѣрнымъ ему квадратомъ, можетъ быть рѣшенъ только по приближенію. Въ исторіи математики вопросъ о превращеніи круга въ квадратъ извѣстенъ подъ названіемъ *квадратуры круга*.

ПРЕДЛОЖЕНІЯ И ВОПРОСЫ

ДЛЯ УПРАЖНЕНІЙ

НА ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ

Численная задача 1 Двѣ прямыя пересѣкаются. одинъ изъ угловъ равенъ $^4/_3$ прямаго угла; вычислить остальные три угла.

Численная задача 2 Двѣ параллельныя линіи пересѣчены сѣкущею: одинъ изъ внѣшнихъ угловъ равенъ 0,35 прямаго; найти остальные семь угловъ.

Численная задача 3 Двѣ параллельныя линіи пересѣчены сѣкущею, при чемъ внѣшній уголъ на бокѣ котораго лежитъ точка пересѣченія равенъ 0,7 прямаго, а соотвѣтственный ему уголъ равенъ 0,64 прямаго; вычислить остальные шесть угловъ.

Численная задача 4 Данъ уголъ $^2/_5$ прямаго; къ его бокамъ проведены параллельныя линіи Вычислить четыре угла образуемые этими линіями.

Численная задача 5 Двѣ прямыя пересѣчены сѣкущею, при чемъ одинъ изъ внутреннихъ угловъ равенъ $^6/_5$ прямаго, а другой, по ту же сторону сѣкущей, равенъ 0,8 прямаго. По этимъ даннымъ опредѣлить будутъ ли двѣ данныя прямыя параллельны между собою или онѣ пересѣкутся?

Предложеніе 1. Если раздѣлить пополамъ каждый изъ двухъ смежныхъ угловъ, то эти равнодѣлящіе будутъ взаимно перпендикулярны

Предложеніе 2. Прямая, дѣлящая пополамъ какой нибудь уголъ, раздѣлитъ также пополамъ и уголъ противоположный (перемежный) данному.

Предложеніе 3. Если AOB прямая линія и уголъ AOD = BOC то линія DOC необходимо прямая линія (фиг. 4).

Предложеніе 4. Если чрезъ какую нибудь точку проведены четыре прямыя оканчивающіяся въ этой точкѣ, и образуютъ попарно равные противулежащіе углы, то эти четыре линіи составляютъ двѣ прямыя.

Предложеніе 5. Всякая точка равнодѣлящей уголъ пополамъ, равно отстоитъ отъ боковъ этого угла

Предложеніе 6. Если между двумя точками проведены двѣ ломанныя линіи, и каждая состоитъ изъ двухъ прямыхъ то наружная ломанная больше внутренней.

Предложеніе 7. Равнодѣлящіе внутренніе противоположные углы, при двухъ параллельныхъ линіяхъ, параллельны между собою.

Вопросъ 1 На прямой линіи найти точку равно отстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ .

Вопросъ 2. Чрезъ данную точку провести прямую одинаково-отстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ.

Вопросъ 3 Даны двѣ точки A и B по одну сторону прямой CD найти такую точку O на прямой CD, чтобы ломанная AOB была меньше всѣхъ другихъ ломанныхъ проходящихъ отъ A до B чрезъ точки прямой BC.

Вопросъ 4. Между боками угла провесть прямую данной длины и параллельную данному направленію

Вопросъ 5. На бокѣ угла найти такую точку, чтобы перпендикуляръ, проведенный изъ нея на другой бокъ, равнялся напередъ заданной прямой.

Вопросъ 6. Даны двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи. Чрезъ данную точку провесть сѣкущую такъ, чтобы она отрѣзала на данныхъ прямыхъ равныя части отъ вершины.

Вопросъ 7 Чрезъ данную точку провести прямую, которая съ боками даннаго угла составила бы равные углы

НА ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ

Предложеніе 1. Если отъ вершины угла BAC отложимъ по боку AB произвольныя разстоянія AM и AN, а по другому боку отложимъ AM′=AM и AN′=AN, то точка пересѣченія O прямыхъ MN′ и M′N лежитъ на прямой (равнодѣлящей), дѣлящей пополамъ уголъ BAC

(Докажите равенство треугольниковъ ANM′ и AMN′, а потомъ равенство треугольниковъ AMO и AM′O)

Предложеніе 2. Перпендикуляры, опущенные изъ концовъ основанія равнобедреннаго треугольника на противулежащія стороны, равны между собою

(Сравните треугольники, составленные изъ перпендикуляровъ и основанія даннаго треугольника).

Предложеніе 3. Прямыя, проведенныя чрезъ какую нибудь точку равнодѣлящей данный уголъ, параллельно бокамъ этого угла составляютъ съ боками самаго угла—ромбъ.

(Докажите, что треугольникъ, составленный изъ равнодѣлящей, прямой параллельной одному боку и отрѣзка другаго бока,—равнобедренный

Предложеніе 4. Перпендикуляры, восставленные къ бокамъ треугольника изъ ихъ серединъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

(Изъ серединъ двухъ боковъ возставьте къ нимъ перпендикуляры, а изъ точки пересѣченія опустите перпендикуляръ на третій бокъ и докажите, что онъ пройдетъ чрезъ его середину.

Предложеніе 5. Прямыя, проведенныя чрезъ вершины треугольника параллельно противулежащимъ бокамъ, образуютъ треугольникъ котораго бока вдвое больше боковъ даннаго треугольника.

(Имѣйте въ виду, что въ параллелограммѣ противулежащие бока равны между собою).

Предложеніе 6. Три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ

(Чрезъ вершины даннаго треугольника проведите параллельныя противулежащимъ бокамъ и имѣйте въ виду предложеніе 4-е).

Предложеніе 7. Сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки основанія равнобедреннаго треугольника на противулежащіе бока, равна перпендикуляру, опущенному изъ одного конца основанія на противулежащій бокъ.

(Проведите чрезъ данную точку основанія параллельную къ одному изъ равныхъ боковъ; такимъ образомъ на перпендикулярѣ, который долженъ составить сумму, отрѣжется одинъ изъ перпендикуляровъ, долженствующій быть слагаемымъ, а на основаніи предложенія 2-го заключите о равенствѣ другаго отрѣзка и втораго перпендикуляра)

Предложеніе 8. Сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки, взятой внутри правильнаго треугольника, на бока, равна высотѣ этого треугольника.

(Чрезъ данную точку проведите параллельную основанію треугольника, получите равнобедренный треугольникъ, къ которому примѣните предъидущее предложеніе. Изъ равенства треугольниковъ найдется, что перпендикуляръ этого равнобедреннаго треугольника, проведенный изъ конца основанія на противулежащій бокъ, равенъ высотѣ этого треугольника и проч.).

Предложеніе 9 Прямыя, проведенныя чрезъ произвольную точку основанія равнобедреннаго треугольника, параллельно остальнымъ двумъ бокамъ, образуютъ параллелограммъ съ постояннымъ периметромъ.

Предложеніе 10 Хорда треугольника, проведенная чрезъ середину его высоты параллельно основанію, раздѣлитъ другіе два бока по-поламъ и равна половинѣ основанія.

Предложеніе 11. Хорда треугольника параллельна основанію, если она соединяетъ середины остальныхъ двухъ боковъ или середины высоты и одного бока.

Предложеніе 12. Хорда треугольника, проведенная параллельно одному изъ его боковъ чрезъ точку, дѣлящую другой бокъ на равныя части, раздѣлитъ третій бокъ на равныя части; обратное.

Предложеніе 13. Найти мѣсто точекъ срединъ прямыхъ, идущихъ отъ данной точки къ различнымъ точкамъ данной прямой.

Предложеніе 14. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ острыхъ угловъ вдвое болѣе другаго, то ипотепуза вдвое болѣе меньшаго катета; обратное.

Предложеніе 15 Если на бокахъ квадрата отложить отъ вершинъ, въ одномъ направленіи, равныя части, то полученныя точки составятъ вершины новаго квадрата.

Предложеніе 16. Всякая хорда параллелограмма, проходящая чрезъ точку пересѣченія діагоналей, въ этой точкѣ дѣлится по-поламъ и она раздѣляетъ параллелограммъ на два равномѣрные четвеpосторонника.

Предложеніе 17. Равнодѣлящія двухъ внѣшнихъ угловъ, происшедшихъ отъ продолженія двухъ смежныхъ боковъ какого нибудь многоугольника въ одномъ направленіи, образуютъ углы изъ которыхъ одинъ равенъ полусуммѣ этихъ внѣшнихъ угловъ, а другой— полусуммѣ угловъ многоугольника, чрезъ вершины которыхъ проходятъ равнодѣлящія.

Предложеніе 18. Четвероугольникъ будетъ параллелограммъ если его противоположные углы попарно равны между собою.

Предложеніе 19 Діагонали параллелограмма неравны между собою. (см. § 87)

Предложеніе 20. Если діагонали четвероугольника взаимно дѣлятся пополамъ, то такой четвероугольникъ—параллелограммъ.

Предложеніе 21. Равнодѣлящая уголъ параллелограмма а также прямоугольника не совпадаетъ съ діагональю.

Предложеніе 22 Равнодѣлящіе смежные углы параллелограмма взаимно перпендикулярны

Предложеніе 23 Во всякомъ параллелограммѣ, равнодѣлящіе его углы образуютъ прямоугольникъ, котораго противуположныя вершины лежатъ на прямыхъ, параллельныхъ сторонамъ параллелограмма, а діагонали, порознь, равны разности смежныхъ боковъ параллелограмма.

Предложеніе 24. Прямыя, соединяющія послѣдовательно середины боковъ четверосторонника, образуютъ параллелограммъ.

Предложеніе 25. Равнодѣлящіе углы какого нибудь четыреугольника составляютъ четыреугольникъ, въ которомъ противулежащіе углы взаимно-дополнительны до двухъ прямыхъ.

Предложеніе 26 Въ *равнобочной* трапеціи (такъ называется трапеція, въ которой непараллельные бока равны между собою) каждое основаніе составляетъ равные углы съ непараллельными боками.

Вопросъ 1. Чрезъ точку, данную внутри угла, провести прямую до пересѣченія съ боками угла такъ, чтобы данная точка составляла середину этой прямой.

Вопросъ 2. Найти такую точку внутри треугольника, чтобы хорда проведенная чрезъ нее параллельно основанію треугольника, отрѣзала на остальныхъ бокахъ такія части, прилежащія къ этому основанію которыхъ сумма была бы равна упомянутой хордѣ

(Искомая точка есть пересѣченіе равнодѣлящихъ углы при основаніи треугольника)

Вопросъ 4. Чрезъ точку, данную внутри угла, котораго вершина не помѣщается на бумагѣ провесть прямую которой продолженіе прошло бы черезъ эту вершину

(Имѣйте въ виду что высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ).

Вопросъ 5. Опредѣлить путь билліарднаго шара, который изъ данной точки, по отраженію отъ четырехъ бортовъ, долженъ встрѣтить шаръ поставленный въ данной же точкѣ.

(Théorèmes et problémes de Géométrie élémentaire par Eugène Catalan. 1858).

Вопросъ 6 Провести хорду треугольника, параллельную основанію и равную данной прямой

Численная задача 1. Найти уголъ правильнаго треугольника.

Численная задача 2. Найти углы при основаніи равнобедреннаго треугольника, когда уголъ при вершинѣ равенъ $^3/_5$ прямаго угла.

Численная задача 3 Найти суммы угловъ выпуклыхъ много угольниковъ о пяти, шести и семи бокахъ.

Численная задача 4 Вычислить внѣшній уголъ правильнаго треугольника.

Численная задача 5 Уголъ параллелограмма равенъ 0,37 прямаго, найти остальные углы.

Численная задача 6 Периметръ параллелограмма равенъ 140,65 фута, а разность двухъ смежныхъ боковъ равна 12,4; вычислить бока этого параллелограмма

Численная задача 7 Основанія трапеціи извѣстны, одно 13 ф 7,4 дюйма, другое 18 арш $+4^1/_2$ вершк. Найти длину прямой соединяющей середины непараллельныхъ боковъ.

Численная задача 8. Половина діагонали прямоугольника равна 13 63 дюйм.· найти другую діагональ.

НА ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ

Предложеніе 1 Въ четвероугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, противуположные углы взаимно дополнительны до двухъ прямыхъ.

Предложеніе 2. Четвероугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругѣ если сумма его противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

(Чрезъ три вершины проведите окружность; положите, что она не проходитъ чрезъ четвертую вершину; основываясь на предъидущемъ предположеніи получится нелѣпый выводъ).

Предложеніе 3. Сумма противолежащихъ боковъ четвероугольника, описаннаго около круга, равна суммѣ остальныхъ двухъ боковъ.

Предложеніе 4 *Равнобочная* трапеція (такъ называется трапеція, въ которой непараллельные бока равны между собою) можетъ быть вписана въ кругѣ.

Предложеніе 5 Діагонали трапеціи, вписанной въ кругѣ, пересѣкаются на діаметрѣ, проходящемъ чрезъ точку пересѣченія непараллельныхъ боковъ. Этотъ діаметръ перпендикуляренъ къ основаніямъ трапеціи

(Имѣя въ виду, что углы при основаніяхъ равнобочной трапеціи равны между собою, докажите, что точка пересѣченія діагоналей, а также пересѣченіе непараллельныхъ боковъ находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ концовъ одного изъ основаній трапеціи).

Предложеніе 6. Во всякомъ вписанномъ многоугольникѣ, четнаго числа боковъ, сумма угловъ на мѣстахъ нечетныхъ равна суммѣ угловъ на мѣстахъ четныхъ

(Разбейте многоугольникъ изъ одной вершины на четвероугольники).

Предложеніе 7. Въ пересѣкающихся окружностяхъ разстояніе между центрами меньше суммы радіусовъ

Предложеніе 8. Въ касающихся окружностяхъ разстояніе между центрами равно суммѣ или разности радіусовъ, смотря по тому будутъ ли окружности одна внѣ или внутри другой.

Предложеніе 9 Въ двухъ кругахъ, неимѣющихъ общихъ точекъ и лежащихъ одна внѣ другой, разстояніе между центрами больше суммы радіусовъ.

Предложеніе 10. Въ двухъ окружностяхъ, не имѣющихъ общихъ точекъ и лежащихъ одна внутри другой разстояніе между центрами меньше разности радіусовъ.

Предложеніе 11. Если чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей проведутся діаметры, то линія, соединяющая ихъ концы пройдетъ чрезъ другую точку пересѣченія круговъ.

Предложеніе 12. Если чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей провесть прямую, параллельную линіи центровъ, то сумма хордъ, полученныхъ на этой прямой, равна удвоенному разстоянію между центрами.

Предложеніе 13. Діаметръ окружности вписанной въ прямоугольномъ треугольникѣ, равенъ избытку суммы катетовъ надъ ипотенузою

Предложеніе 14. Если чрезъ точку касанія двухъ круговъ провесть двѣ сѣкущія, то хорды, соединяющія концы этихъ сѣкущихъ въ каждомъ кругѣ параллельны между собою.

(Проведите касательную чрезъ точку касанія круговъ).

Предложеніе 15. Если чрезъ точку P, взятую внѣ или внутри круга, провесть сѣкущія въ произвольномъ числѣ, то середины полученныхъ такимъ образомъ хордъ, будутъ лежать на окружности, которой діаметръ равенъ линіи соединяющей точку P съ центромъ даннаго круга.

Предложеніе 16. Для двухъ окружностей, неимѣющихъ общихъ точекъ, наибольшая и наименьшая изъ линій, соединяющихъ точки одной окружности съ точками другой, будетъ та которая проходитъ чрезъ центры.

Предложеніе 17. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой-нибудь точки окружности на бока вписаннаго треугольника, находятся на прямой линіи.

Вопросъ 1. Раздѣлить пополамъ уголъ котораго вершина не помѣщается на бумагѣ.

Вопросъ 2. Въ данномъ углѣ вписать окружность даннымъ радіусомъ.

Вопросъ 3. Чрезъ точку, данную внѣ двухъ параллельныхъ, провести прямыя такъ, чтобы части ихъ, заключающіяся между этими параллельными, были равны, каждая, данной прямой.

Вопросъ 4. Чрезъ двѣ точки, данныя на окружности, провесть двѣ параллельныя хорды, которыхъ сумма равна данной прямой.

Вопросъ 5. Построить треугольникъ зная его основаніе, высоту и уголъ противъ основанія.

Вопросъ 6. Построить треугольникъ, зная основаніе, сумму остальныхъ двухъ боковъ и одинъ изъ угловъ при основаніи.

Вопросъ 7 Построить треугольникъ, зная основаніе разность остальныхъ двухъ боковъ и уголъ при основаніи.

Вопросъ 8. Построить треугольникъ, зная уголъ при основаніи высоту и периметръ.

Вопросъ 9 Построить треугольникъ, зная основаніе противулежащій ему уголъ и сумму остальныхъ боковъ

Вопросъ 10. Построить треугольникъ, зная основаніе, противулежащій ему уголъ и разность остальныхъ боковъ.

Вопросъ 11. Построить треугольникъ, зная основаніе уголъ при вершинѣ и кругъ, вписанный въ треугольникѣ.

Вопросъ 12. Чрезъ точку, данную внѣ круга, провесть сѣкущую такъ, чтобы получить хорду, равную данной длинѣ.

Вопросъ 13. Въ данномъ кругѣ провесть хорду данной длины кото рая дѣлилась-бы пополамъ другою данною хордою.

Вопросъ 14. Описать окружность, касательную къ данной окруж ности и данной прямой, въ назначенной на ней точкѣ.

Вопросъ 15. Описать окружность, касательную къ данной прямой и къ окружности въ назначенной на ней точкѣ.

Вопросъ 16 Построить треугольникъ по двумъ угламъ и пери метру.

Вопросъ 17 Построить параллелограммъ по двумъ діагоналямъ и одному боку.

Вопросъ 18 Построить трапецію по даннымъ ея бокамъ

Вопросъ 19. Описать окружность которая отрѣзала-бы отъ двухъ параллельныхъ линій хорды, равныя даннымъ длинамъ.

Вопросъ 20. Даны окружность и прямая линія; найти такую точку на этой прямой, чтобы окружность, описанная изъ нея какъ центра радіусомъ равнымъ данной длинѣ, была касательно къ данному кругу

Вопросъ 21. Описать окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки и пересѣкающую данный кругъ такъ чтобы общая хорда была параллельна данному направленію.

Вопросъ 22. Найти геометрическое мѣсто точекъ равно удаленныхъ отъ данной окружности.

Вопросъ 23. Найти геометрическое мѣсто серединъ равныхъ хордъ данной окружности

Вопросъ 24. Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ точку пере сѣченія двухъ окружностей и ограниченныхъ этими окружностями, най-ти наибольшую.

Вопросъ 25 Описать окружность даннымъ радіусомъ которая прошла-бы чрезъ двѣ данныя точки.

Вопросъ 26. Описать окружность даннымъ радіусомъ проходящую чрезъ данную точку и центръ которой находился бы или на данной прямой или на данной окружности.

Вопросъ 27 Описать окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки и которой центръ находился бы на данной прямой, или на данной окружности.

Вопросъ 28. Описать окружность данымъ радіусомъ, которая прошла бы чрезъ данную точку и касалась данной прямой или окружности.

Вопросъ 29. Описать окружность даннымъ радіусомъ, которой центръ находился бы на данной прямой и которая касалась бы или другой данной прямой, или данной окружности.

Вопросъ 30. Описать окружность даннымъ радіусомъ, которой центръ находился бы на данной окружности, и которая касалась бы данной прямой, или данной окружности.

Вопросъ 31 Описать окружность даннымъ радіусомъ и касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.

Вопросъ 32. Описать окружность даннымъ радіусомъ и касательную къ данной прямой и данной окружности.

Вопросъ 33 Описать окружность даннымъ радіусомъ и касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.

Вопросъ 34. Описать окружность, проходящую чрезъ данную точку и касательную къ прямой въ данной на ней точкѣ.

Вопросъ 35. Описать окружность, проходящую чрезъ данную точку, и касательную къ окружности въ данной на ней точкѣ.

Вопросъ 36. Описать окружность касательную къ двумъ даннымъ прямымъ и одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

Вопросъ 37. Къ окружности провести касательную составляющую данный уголъ съ данною прямою

Вопросъ 38. Описать окружность касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ и притомъ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

Вопросъ 39. Построить треугольникъ, зная его углы и высоту.

Вопросъ 40 Построить прямоугольникъ зная его сторону и діагональ.

Вопросъ 41. Построить прямоугольникъ зная его сторону и уголъ между діагоналями.

Вопросъ 42 Построить ромбъ по двумъ его діагоналямъ

Вопросъ 43 Построить ромбъ, зная его сторону и уголъ.

Вопросъ 44 Построить ромбъ, зная его сторону и діагональ

Вопросъ 45 Построить квадратъ, когда извѣстна его діагональ.

Численная задача 1 Уголъ, вписанный въ окружности равенъ

0,37 прямаго, найти центральный уголъ, соотвѣтствующій дугѣ, заключающейся между боками этого угла.

Численная задача 2. Найти уголъ, составленный хордою и касательною, зная центральный уголъ 0,59 прямаго, соотвѣтствующій дугѣ, заключающейся между боками перваго угла.

Численная задача 3. Разстояніе между центрами двухъ круговъ равно 5,4 дюйма, радіусы этихъ круговъ равны 9,2 дюйма и 6,8 дюйма. Опредѣлить положеніе круговъ, т. е. будутъ ли они пересѣкаться, касаться или не имѣютъ общихъ точекъ.

Численная задача 4. Радіусъ одного круга равенъ 5 вершкамъ, другаго 8 дюймамъ, а разстояніе между ихъ центрами равно 15 дюймамъ. Опредѣлить положеніе одного круга относительно другаго.

Численная задача 5. Опредѣлить положеніе круговъ, зная, что разстояніе между ихъ центрами равно 14,7, большій радіусъ равенъ 10,9, а меньшій—3,8

Численная задача 6. Діаметръ меньшаго круга равенъ 12,4 верш разстояніе между центромъ этого круга и центромъ другаго большаго круга равенъ 1 фут. + 2,4 дюйм. Найти какія величины можно задать для радіуса большаго круга чтобы въ немъ заключался меньшій кругъ.

НА ОТДѢЛЫ ЧЕТВЕРТЫЙ ПЯТЫЙ И ШЕСТОЙ.

Предложеніе 1. Треугольникъ, коего вершины суть середины боковъ даннаго треугольника, подобенъ этому послѣднему.

Предложеніе 2. Средняя пропорціональная двухъ неравныхъ линій всегда меньше средній ариѳметической тѣхъ же линій.

Предложеніе 3. Во всякой трапеціи середины основаній, точка встрѣчи непараллельныхъ боковъ и пересѣченіе діагоналей лежатъ на одной прямой.

Предложеніе 4 Если чрезъ какую нибудь данную точку M провести сѣкущія въ окружности, то произведеніе разстояній точки M до пересѣченій съ окружностью будетъ постоянная величина.

Предложеніе 5. Линіи, соединяющія середины боковъ треугольника съ противулежащими вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предложеніе 6. Во всякомъ вписанномъ четвеþосторонникѣ произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противулежащихъ боковъ

Предложеніе 7. Отъ соединенія серединъ смежныхъ боковъ всякаго четвеþосторонника получается параллелограммъ.

Предложеніе 8. Во всякомъ параллелограммѣ сумма квадратовъ всѣхъ боковъ *равна* суммѣ квадратовъ діагоналей

Предложеніе 9. Во всякомъ четвероугольникѣ сумма квадратовъ всѣхъ боковъ равна суммѣ квадратовъ діагоналей, вмѣстѣ съ учетвереннымъ квадратомъ линіи, соединяющей середины діагоналей.

Вопросъ 1. Раздѣлить треугольникъ на два равномѣрные треугольника прямою проходящею чрезъ вершину.

Вопросъ 2. Раздѣлить треугольникъ на двѣ равномѣрныя части прямою, проходящею чрезъ точку взятую на сторонѣ даннаго треугольника.

Вопросъ 3. Раздѣлить треугольникъ на *n* равномѣрныхъ треугольниковъ прямыми, проходящими чрезъ вершину.

Вопросъ 4. Раздѣлить треугольникъ на три треугольника пропорціональные числамъ *a*, *b* и *c* прямыми, проходящими чрезъ вершину треугольника.

Вопросъ 5. Построить равнобедренный треугольникъ, равномѣрный данному и имѣющій съ послѣднимъ общее основаніе и общую высоту.

Вопросъ 6. Построить квадратъ, равномѣрный суммѣ или разности двухъ данныхъ квадратовъ

Вопросъ 7. На данной прямой построить прямоугольникъ равномѣрный данному прямоугольнику

Вопросъ 8. Данную прямую раздѣлить на части пропорціональныя даннымъ квадратамъ.

Вопросъ 9. Построить квадратъ, который относился бы къ данному квадрату, какъ данныя прямыя *m*. *n*.

Вопросъ 10. Построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику, зная отношеніе сходственныхъ боковъ.

Вопросъ 11, Построить прямоугольникъ, равномѣрный данному квадрату, когда извѣстны: 1) сумма и 2) разность его измѣреній.

Вопросъ 12. Описать окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки и касательную къ данной прямой.

Вопросъ 13. Даны двѣ окружности, провести къ нимъ общую касательную.

Вопросъ 14. На данной прямой построить правильные многоугольники о трехъ, шести, двѣнадцати сторонахъ

Вопросъ 15. На данной прямой построить правильные многоугольники о четырехъ, восьми шестнадцати,... сторонахъ

Вопросъ 16. На данной прямой построить правильный десятиугольникъ

Вопросъ 17 На данной прямой построить правильный пятиугольникъ

Вопросъ 18 На данной прямой построить уголъ въ 36° 72° и 144°

Вопросъ 19. Даны два подобные треугольника, построить треугольникъ имъ подобный и равномѣрный ихъ суммѣ или разности

Вопросъ 20. Даны два подобные многоугольника, построить многоугольникъ имъ подобный и равномѣрный ихъ суммѣ или разности

Численныя задачи на отдѣлы IV V и VI

1) Къ боку треугольника, длиною въ 4,6 дюйма, проведена параллельная хорда, дѣлящая одинъ изъ остальныхъ двухъ боковъ на части пропорціональныя числамъ 7 и 4; найти длину этой хорды и опредѣлить какую часть она отрѣзываетъ отъ площади даннаго треугольника.

2) Два бока треугольника извѣстны 17 дюймовъ и $11^1/_4$ дюймовъ,. на третьемъ боку найти точку, по соединеніи которой съ вершиною противулежащаго угла, этотъ послѣдній раздѣлился бы пополамъ.

3) Хорда, параллельная одному изъ катетовъ, равна $17^1/_2$ дюймовъ причемъ она дѣлитъ другой катетъ на части пропорціональныя числамъ 2 и 3; вычислить первый катетъ.

4) Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямаго угла на ипотенузу, равна 7 дюймамъ, длина ипотенузы равна 1 фут $+5^1/_2$ дюймовъ; найти отрѣзки ипотенузы.

5) Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на ипотенузу, даетъ два отрѣзка, одинъ въ 11 дюймовъ другой въ 4 дюйма. Вычислить оба катета этого треугольника, съ точностью до 0 1 дюйма.

6) Радіусъ круга равенъ 9 дюймамъ; найти длину хорды, перпендикулярной къ діаметру и отстоящей отъ центра на 2,4 дюйма.

7) Длина хорды равна 3 верш., изъ середины ея возстановленъ къ

ней перпендикуляръ, отрѣзокъ его между хордою и дугою равенъ 4,7 вершка; найти діаметръ.

8) Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды, отрѣзки одной суть 7 дюймовъ и 3 дюйма, а одинъ изъ отрѣзковъ другой хорды равенъ 9 дюймамъ, найти другой отрѣзокъ этой хорды.

9) Найти хорду круга, отстоящую отъ центра на 6 дюймовъ когда радіусъ этого круга равенъ 11,7 дюйма.

10) Изъ точки, взятой внѣ круга, проведена касательная длиною въ 7 вершковъ и сѣкущая, которой часть, заключающаяся въ кругѣ равна 5 вершкамъ; найти длину сѣкущей и внѣшняго ея отрѣзка.

11) Изъ точки, взятой внѣ круга, проведена касательная длиною въ 7 вершковъ и нормальная. Найти длины обѣихъ нормалей, когда радіусъ круга равенъ 4 дюймамъ.

12) Изъ точки, взятой внѣ круга, проведена касательная и нормальная, длина касательной равна 12 вершкамъ, длина большей нормали равна 18 верш.; найти діаметръ окружности и длину меньшей нормали

13) Въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ ипотенуза равна 6 дюймамъ; найти катеты.

14) Ипотенуза треугольника равна 4,1 дюйма одинъ изъ катетовъ равенъ $^5/_7$ дюйма; найти другой катетъ.

15) Большій отрѣзокъ прямой, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, равенъ 10; найти длину прямой.

16) Извѣстны основаніе 12 и высота 4 въ прямоугольникѣ, найти діагональ этого прямоугольника.

17) Извѣстны бока четвероугольника, именно 17,15,10,4 дюйма, найти бока подобнаго ему многоугольника когда извѣстенъ его периметръ 9,4 дюйма.

18) Общая хорда двухъ пересѣкающихся круговъ равна 4 дюймамъ, радіусъ одного круга равенъ 7 дюймамъ, радіусъ другого круга 3 дюймамъ; Найти разстояніе между центрамы

19) Площадь треугольника равна 1 квадр. футу основаніе его равно 9 дюймамъ, найти высоту этого треугольника.

20) Вычислить площадь трапеціи, которой большее основаніе равно 4 дюймамъ, меньшее—$2^1/_4$ дюймамъ, а высота—5 дюймамъ.

21) Отношеніе основанія прямоугольника къ его высотѣ равно $^7/_3$, площадь прямоугольника равна одной десятинѣ Найти основаніе и высоту прямоугольника

22) Два треугольника подобны, сторона одного равна 14,7 верш., другаго—сходственная первой 7,9 верш.; высота перваго треугольника равна 2 дюймамъ. Найти во сколько разъ площадь одного треугольника меньше площади другаго треугольника

23) Два многоугольника подобны, сторона одного въ 3 раза меньше сходственной ей стороны въ другомъ; во сколько разъ периметръ и площадь перваго многоугольника меньше периметра и площади другаго многоульника.

24) Вычислить площадь правильнаго треугольника зная его сторону.

25) Вычислить площадь правильнаго шестиугольника въ зависимости отъ его стороны. Тоже и для правильнаго двѣнадцатиугольника

26) Вычислить площадь правильнаго восьмиугольника въ зависимости его стороны.

27) Вычислить площадь правильнаго десятиугольника въ зависимости его стороны

28) По данной площади правильнаго многоугольника о 3, 6 12, 8 и 10 сторонахъ, найти бокъ каждаго изъ нихъ.

29) Стороны двухъ правильныхъ треугольниковъ равны 21,4 ф и 14,3 ф Вычислить бокъ третьяго правильнаго треугольника равномѣрнаго суммѣ двухъ данныхъ, не отыскивая ихъ площадей.

30) Рѣшить тотъ же вопросъ для правильныхъ шестиугольниковъ

31) Радіусы двухъ круговъ извѣстны, 17 верш и 4 вершка. Узнать во сколько разъ окружность и площадь перваго круга больше окружности и площади другаго круга.

32) Найти величину градуса окружности, которой діаметръ—2 дюйма

33) Центральный уголъ равенъ 23° 15′, радіусъ равенъ 1 вершку, найти площадь сектора.

34) Между боками угла описаны дуги, принимая вершину за центръ, а за радіусъ длины 7,4 вершка и 3,5 вершка· узнать во сколько разъ одна дуга больше другой.

35) Бокъ квадрата, описаннаго около круга, равенъ 4,1 дюйма, найти длину окружности

36) Бокъ квадрата вписаннаго въ кругѣ равенъ 7 вершкамъ, вычислить площадь круга.

37) Бокъ треугольника, вписаннаго въ кругѣ равенъ 6 вершкамъ Вычислить длину окружности и площади круга.

38) Площадь шестистороннника, вписаннаго въ кругѣ, равна 12,4 кв. дюймамъ. Узнать разность между площадью этого круга и площадью многоугольника.

39) Радіусъ круга равенъ 3 дюймамъ во сколько разъ надобно увеличить этотъ радіусъ, чтобы площадь круга увеличилась въ 325 разъ

40) Найти окружность круга, если бокъ вписаннаго въ немъ правильнаго десятиугольника равенъ $4^1/_2$ дюйма.

41) Площадь круга равна 345,64 кв. дюймамъ найти центральный уголъ, соотвѣтствующій дугѣ длиною въ 3 дюйма

42) Окружности двухъ круговъ пропорціональны числамъ 9 и 4 по извѣстной площади большаго круга 1000 кв. дюймовъ, найти площадь даннаго круга.

43) Радіусы двухъ подобныхъ секторовъ пропорціональны числамъ $1^1/_2$ и 4,2; зная площадь меньшаго сектора 46 кв. дюймовъ найти площадь большаго сектора.

44) Дугѣ 75° 23′ 40″ соотвѣтствуетъ секторъ, котораго площадь равна 100 кв дюймамъ; найти площадь сектора того же круга при дугѣ въ 100°.

45) Сравнивая площади двухъ правильныхъ полигоновъ одинакова то числа боковъ, нашли, что одна площадь втрое больше другой узнать во сколько разъ бокъ перваго полигона больше бока втораго полигона.

46) Два правильные полигона подобны, площадь одного изъ нихъ составляетъ половину другой площади, узнать какую часть составляетъ діаметръ круга, описаннаго около перваго полигона отъ діаметра круга описаннаго около втораго полигона.

47) Вычислить бокъ правильнаго треугольника описаннаго около круга, котораго діаметръ равенъ 5 футамъ.

48) Вычислить бокъ правильнаго треугольника, описаннаго около круга, зная, что бокъ правильнаго вписаннаго треугольника равенъ 3 арш + $15^1/_4$ вершковъ.

49) Вычислить число градусовъ, заключающихся въ дугѣ, которой длина равна радіусу.

50) Вычислить число градусовъ дуги, которой длина равна 17 дюймамъ, при радіусѣ 12 дюймовъ.

51) Найти радіусъ такого круга, въ которомъ дуга въ 14° 12′ была бы равна 18 дюймамъ

*

52) Радіусъ одного круга 10 ф., другаго 2 арш. 9 верш. и треть яго $14^1/_3$ ф. Вычислить радіусъ четвертаго круга равномѣрнаго суммѣ трехъ данныхъ, не вычисляя площадей

53) Радіусы концентрическихъ круговъ равны, одного 10 ф., дру таго 6 ф. Вычислить площадь кольца между данными окружностями.

54) Радіусы двухъ концентрическихъ круговъ разнятся на 2 ф., а площадь кольца образуемаго ими равна 4 квад саж Вычислить радіусы.

55) Площадь круга и площадь вписаннаго въ немъ правильнаго тре угольника составляютъ вмѣстѣ 15 кв, ф. Вычислить площади круга и треугольника.

56) Вычислить площадь правильнаго треугольника, зная, что ра діусъ круга въ немъ вписаннаго равенъ 5 ф.

57) Вычислить площадь сегмента, заключающуюся между дугою въ 60^0 и ея хордою, зная, что сегментъ принадлежитъ кругу, коего радіусъ равенъ 3 саж

ЧАСТЬ II

ГЕОМЕТРІЯ О ТРЕХЪ ИЗМѢРЕНІЯХЪ

(Стереометрія)

ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ

Прямыя линіи, разсматриваемыя въ пространствѣ и плоскости

---

11. Плоскость. — Условія, опредѣляющія ея положенія — Взаимное пересѣченіе двухъ и трехъ плоскостей. — Перпендикуляръ къ прямой, въ какой ни есть ея точкѣ. — Прямыя въ пространствѣ могутъ не пересѣкаться и быть между тѣмъ непараллельными.

§ 320. До сихъ поръ мы разсматривали протяженія на одной плоскости, и потому объемы не могли подлежать нашему изслѣдованію, а разсматривались только линіи и площади. Мы показали свойства прямыхъ линій, перпендикулярныхъ и параллельныхъ, способы измѣренія прямой линія и окружности (§ 318), свойства прямолинейныхъ фигуръ и измѣреніе ихъ площадей, а также измѣреніе площади круга. Пропорціональность величинъ дала намъ возможность, при измѣреніи угловъ окружности и площадей, устранить наложеніе единицы въ измѣряемой величинѣ; безъ пропорціональности мы встрѣтили бы непреодолимое затрудненіе; напримѣръ, какъ квадратъ, принятый за 1-цу, укладывать въ треугольникѣ параллелограммѣ или кругѣ—для узнанія ихъ площадей? А также: какъ укладывать линейную 1-цу въ окружности для измѣренія ея длины? Все это устранено пропорціональностью величинъ, ею же мы будемъ пользоваться при измѣреніи объемовъ.

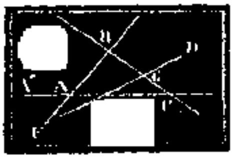
Чтобы при дальнѣйшемъ изслѣдованіи протяженій можно было пользоваться Геометріею на плоскости, надобно знать признаки, по которымъ можно опредѣлить, будутъ ли данныя протяженія лежать въ одной плоскости.

Признаки эти изложены въ слѣдующихъ трехъ предложеніяхъ

Предложеніе

§ 321. *Три точки, лежащія не въ прямой линіи, опредѣляютъ положеніе плоскости, т. е. чрезъ эти точки можно провесть плоскость, и при томъ только одну.*

Пусть даны три точки A, B и C. Двѣ изъ нихъ, напримѣръ A и B соединимъ прямою линіей. Чрезъ прямую AB можно провесть плоскость (§ 17) и обращать ее на этой линіи. Плоскость необходимо должна встрѣтить точку C, потому что плоскость полагается безконечно продолженною, и такъ чрезъ три точки A B и C можно провесть плоскость. Назовемъ ее буквою M, и положимъ что чрезъ эти же точки проходитъ другая плоскость, которую назовемъ N. Возьмемъ какую нибудь точку D на плоскости N, и докажемъ что она лежитъ и на плоскости M Три точки A, B и C, по условію лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ; поэтому и прямыя AB, BC и AC неопредѣленно продолженныя, лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ (§ 17) Прямая BC дѣлитъ плоскость N на двѣ части: точка D находится въ одной части· въ другой части на прямой AB возьмемъ какую нибудь точку F и соединимъ ее съ D прямою FD, эта послѣдняя пересѣчетъ BC въ точкѣ G ибо обѣ прямыя находятся въ плоскости N Такъ какъ точки F и G находятся на прямыхъ AB и BC, то онѣ лежатъ также въ плоскости M, и всѣ точки неопредѣленной прямой FG, а слѣдовательно и точка D лежатъ въ плоскости M. И такъ всякая точка плоскости N лежитъ на плоскости M; слѣдовательно эти плоскости составляютъ одну, и положеніе плоскости, какъ единственной, вполнѣ опредѣлено.



Фиг. 185

Для яснаго пониманія необходимо имѣть въ виду, что прямыя линіи и плоскости принимаются продолженными безпредѣльно во всѣ стороны

Предложеніе

§ 322 *Двѣ пересѣкающіяся прямыя опредѣляютъ положеніе плоскости.*


Фиг. 5

Возьмемъ двѣ точки A и C на прямыхъ AB и CD. Чрезъ эти точки и пересѣченіе O, какъ лежащія не на одной прямой, можно провесть плоскость; она будетъ содержать и прямыя AB и CD ибо каждая изъ нихъ будетъ имѣть двѣ общія точки съ плоскостью, A и O C и O. Всякая другая плоскость, проходящая чрезъ эти прямыя, сольется съ первою плоскостью, потому что у нихъ будутъ три общія точки, напримѣръ A, B и C, лежащія не на одной прямой.

§ 323. *Слѣдствіе. Прямая линія и точка, внѣ ея, опредѣляютъ положеніе плоскости.* Объясненіе то же что и въ предъидущемъ параграфѣ

Предложеніе

§ 324. *Двумя параллельными прямыми опредѣляется положеніе плоскости*

Дѣйствительно, двѣ параллельныя линіи, по самому опредѣленію ихъ, лежатъ въ одной плоскости; а всякая другая плоскость, проведенная чрезъ эти линіи, сольется съ первою, потому что у нихъ будутъ три общія точки не въ прямой линіи, напримѣръ, двѣ точки на одной и третья на другой изъ параллельныхъ.

§ 325. Прямая линія относительно плоскости можетъ имѣть три различныя положенія:

1) или *вся лежитъ на плоскости,*

2) или *пересѣкаетъ ее,* — причемъ пересѣченіе составитъ одну точку: въ противномъ случаѣ, при двухъ общихъ точкахъ, или больше, прямая совпала бы съ плоскостью (§ 17); точка эта называется *основаніемъ* прямой

3) или прямая находится вся внѣ плоскости на всемъ протяженіи той и другой, сколько бы ихъ ни продолжали,—причемъ прямая называется *параллельною къ плоскости*

Предложение

§ 326 *Взаимное пересеченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.*

И дѣйствительно если бъ общее пересѣченіе двухъ плоскостей не была прямая, то нашлись бы на пересѣченіи три точки, расположенныя не на одной прямой; слѣдовательно обѣ плоскости, имѣя три общія точки, не на одной прямой, совпали бы въ одну плоскость (§ 321) и значитъ не пересѣкались бы, что противно условію.

§ 327. *Взаимное пересѣченіе трехъ плоскостей, вообще, есть точка, но можетъ быть и прямая линія*

Дѣйствительно, чтобы получить взаимное пересѣченіе трехъ плоскостей, надобно взаимное пересѣченіе двухъ плоскостей пересѣчь третьею плоскостью; а извѣстно (§ 325) что сѣченіе прямой линіи съ плоскостью составитъ точку.

Впрочемъ третья плоскость можетъ пройти чрезъ сѣченіе первыхъ двухъ плоскостей, и тогда взаимное сѣченіе трехъ плоскостей будетъ прямая линія.

§ 328. Чрезъ прямую линію можно провесть множество плоскостей и эта прямая, очевидно, будетъ общимъ ихъ сѣченіемъ Если чрезъ какую нибудь точку этой прямой вообразимъ перпендикуляры къ ней въ каждой плоскости, то получимъ столько перпендикуляровъ въ пространствѣ, сколько было проведено плоскостей. И такъ, *въ пространствѣ можно провесть множество перпендикуляровъ къ прямой проходящихъ чрезъ одну какую нибудь точку.*

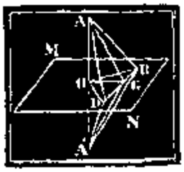
§ 329. Если, въ двухъ точкахъ прямой вообразимъ два перпендикуляра къ ней въ различныхъ плоскостяхъ, которыя проходятъ чрезъ эту прямую, то получимъ двѣ линіи, которыя очевидно не встрѣтятся и вмѣстѣ съ тѣмъ не будутъ параллельны между собою, потому что не находятся въ одной плоскости И такъ, *прямыя въ пространствѣ могутъ не пересѣкаться и быть между тѣмъ непараллельными.*

12 Перпендикуляры къ прямой, въ какой ни есть ея точкѣ, находятся въ одной плоскости. — Перпендикуляръ къ плоскости. — Чрезъ каждую точку прямой можно провести перпендикулярную къ ней плоскость, и только одну. — Свойство перпендикуляра къ плоскости и линій къ ней наклонныхъ.

Предложеніе

§ 330 *Всѣ перпендикуляры къ прямой въ какой ни есть ея точкѣ, находятся въ одной плоскости.*

Чрезъ прямую AA' проведемъ двѣ плоскости и въ каждой изъ точки O возставимъ къ прямой AA' перпендикуляры OB и OD; они находятся въ одной плоскости MN (§ 322). Чрезъ прямую AA' проведемъ третію плоскость, которая пересѣчетъ плоскость MN по линіи OG, и докажемъ, что это сѣченіе OG перпендикулярно къ AO. А какъ въ



Фиг 186.

одной плоскости изъ точки можно возставить одинъ только перпендикуляръ то вмѣстѣ съ тѣмъ докажется, что перпендикуляръ возставленный въ этой третьей плоскости изъ O къ прямой AA', совпадетъ съ OG, и слѣдовательно лежитъ въ плоскости MN. Разсѣчемъ линіи OB, OG и OD прямою BD точки пересѣченія B, G и D соединимъ съ какою нибудь точкою A прямой AA', а также и съ другою точкою A', находящеюся на такомъ разстояніи отъ O, на какомъ точка A — отъ O, т. е. AO=A'O. Въ плоскости ABA' (§ 321), прямая OB перпендикулярна къ AA' и проходитъ чрезъ ея середину O — поэтому AB =A'B (§ 58), по той же причинѣ въ плоскости ADA' AD=A'D. И такъ въ треугольникахъ ABD и A'BD три стороны одного равны тремъ сторонамъ другаго, потому что BD общая; слѣдовательно сходственные углы равны т. е. уголъ ABG=A'BG. Въ треугольникахъ ABG и A'BG между равными сторонами, AB=A'B, BG общая, лежатъ равные углы ABG=A'BG; слѣдовательно и остальныя сходственныя стороны равны, AG=A'G. Наконецъ въ треугольникахъ AGO и A'GO всѣ стороны, поровнь, равны: AG=A'G, AO=A'O и GO общая; поэтому и сходственные углы равны, AOG=A'OG: значитъ GO перпендикулярна къ AA', и обратно AA' перпендикулярна къ OG Такъ какъ третья плоскость проведена чрезъ A'A совершенно произвольно, то можно сказать, что всѣ перпендикуляры къ прямой A'A, проведенные чрезъ точку O, находятся въ плоскости MN

Плоскость, содержащая всѣ перпендикуляры къ прямой въ какой ни есть ея точкѣ, называется *плоскостью перпендикулярною* къ прямой въ этой точкѣ.

§ 331 *Слѣдствіе.* Изъ доказаннаго предложенія слѣдуетъ: *если плоскость содержитъ два перпендикуляра къ прямой въ какой нибудь ея точкѣ, то она содержитъ и всѣ перпендикуляры къ прямой въ этой точкѣ, или иначе:*

прямая, перпендикулярная къ двумъ прямымъ, проведеннымъ по плоскости чрезъ ея основаніе, перпендикулярна и ко всякой прямой, проведенной чрезъ это основаніе въ той же плоскости

Такъ, если AO перпендикулярна къ прямымъ OB и къ OD, лежащимъ въ плоскости MN, то проведя въ плоскости, MN, чрезъ основаніе O, какую нибудь прямую OG, найдемъ, что AO перпендикулярна къ OG.

§ 332. *Перпендикуляромъ къ плоскости называется прямая линія, перпендикулярная ко всѣмъ прямымъ проведеннымъ чрезъ ея основаніе по этой плоскости.*

§ 333. Чтобы убѣдиться, что прямая линія перпендикулярна къ плоскости, надобно доказать, что *она перпендикулярна только къ двумъ прямымъ, проведеннымъ по плоскости чрезъ ея основаніе;* ибо и въ такомъ случаѣ, на основаніи предъидущаго слѣдствія (§ 331) она будетъ перпендикулярна и ко всѣмъ линіямъ, проведеннымъ въ этой плоскости чрезъ основаніе, а такая линія называется перпендикулярною къ плоскости (§ 332).

Предложеніе

§ 334. *Чрезъ каждую точку прямой можно провесть перпендикулярную къ ней плоскость, и только одну.*

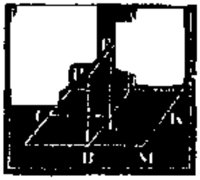
Чрезъ данную прямую проведемъ двѣ какія нибудь плоскости, и въ каждой изъ нихъ возставимъ перпендикуляръ изъ данной точки; плоскость, проходящая чрезъ эти перпендикуляры, будетъ перпендикулярна къ прямой (§ 333). И такъ чрезъ каждую точку прямой всегда можно провесть перпендикулярную къ ней плоскость.

Положимъ, что существуетъ другая плоскость также перпендикулярная къ прямой въ той же точкѣ: она должна заключать всѣ перпендикуляры, возставленные къ прямой чрезъ данную точку (§ 330); и слѣдовательно она пройдетъ чрезъ первые два перпендикуляра и совмѣстится съ первою плоскостью, потому что двумя пересѣкающимися прямыми опредѣляется положеніе плоскости

Предложеніе.

§ 335. *Изъ каждой точки плоскости можно возставить къ ней перпендикуляръ, и только одинъ.*

1) Пусть точка G лежитъ на плоскости M, и требуется изъ нея возставить перпендикуляръ къ этой плоскости. Чрезъ точку G, въ плоскости M, проведемъ произвольную прямую IGK, а къ ней въ точкѣ G, перпендикулярную плоскость AB, пересѣченіе ея BC съ данною плоскостью пройдетъ чрезъ точку G, общую обѣимъ плоскостямъ; затѣмъ въ плоскости AB возставимъ перпендикуляръ GF къ сѣченію BC, — это и будетъ искомый перпендикуляръ.



Фиг. 187.

Въ самомъ дѣлѣ, плоскость AB проведена перпендикулярно къ прямой IK, слѣд. и обратно прямая IK перпендикулярна къ плоскости AB (§ 332) значитъ IK перпендикулярны и къ FG, какъ и ко всякой прямой проведенной по плоскости AB. И такъ прямая FG, будучи перпендикулярна къ двумъ прямымъ IK и BC проведеннымъ по плоскости M необходимо перпендикулярна и къ самой плоскости M (§ 333).

2) Допустимъ, что изъ точки G, принадлежащей плоскости MN можно возставить къ ней два перпендикуляра GF и GH Плоскость проведенная чрезъ эти перпендикуляры, пересѣчетъ плоскость MN по линіи GK, которая пройдетъ чрезъ точку G; прямая GK перпендикулярна къ GF и GH, потому что обѣ эти линіи перпендикулярны къ плоскости MN, слѣдовательно онѣ перпендикулярны и къ прямой GK, проведенной по плоскости M чрезъ основаніе G (§ 332).

Фиг. 188

Итакъ, въ плоскости FHGK къ прямой GK, изъ одной точки G возставлено два перпендикуляра: несправедливость этого вывода показываетъ, что предположеніе наше о возможности двухъ перпендикуляровъ GF и GH,—невозможно.

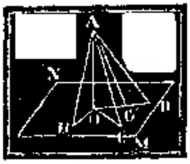
§ 336. Прямая, пересѣкающая плоскость и неперпендикулярная къ ней называется *наклонною*

Предложеніе.

§ 337. *Если изъ какой нибудь точки перпендикуляры къ плоскости провести наклонныя, то* 1) *перпендикуляръ короче наклон* *ной; 2) наклонныя къ плоскости, равно-удаленныя отъ основанія перпендикуляра, равны между собою; 3) изъ наклонныхъ же, неравно-удаленныхъ та длиннѣе которая отстоитъ далѣе отъ этого основанія.*

Пусть прямая AO перпендикулярна къ плоскости MN и точки B, C, C′, D и O лежатъ въ плоскости MN

1) Докажемъ что AO<AB. Прямая AO перпендикулярна къ плоскости MN, слѣдовательно она перпендикулярна и къ прямой BO, проведенной въ этой плоскости чрезъ основаніе O (§ 332): итакъ, въ плоскости ABO, изъ точки O проведены перпендикуляръ AO къ BO и наклонная къ ней AB, слѣдовательно AO<AB (§ 53).



Фиг. 189

2) Пусть OB=OC; докажемъ что AB=AC. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABO и ACO, BO=CO, AO общая и углы между этими сторонами прямые; слѣдовательно и остальныя сходственныя части равны, т. е. AB=AC

3) Если OD>OB, то AD>AB Отложимъ OC′=OB и проведемъ AC′: тогда въ плоскости AOD наклонная AD больше AC′(§ 53); но AC′=AB, ибо эти наклонныя къ плоскости равно удалены отъ основанія O,—поэтому AD больше AB.

---

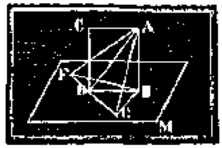
13. Линія, параллельная перпендикуляру къ плоскости, сама къ ней перпендикулярна, и на оборотъ: перпендикуляры къ плоскости всѣ между собою параллельны. -Линіи, параллельныя одной и той же прямой, параллельны между собою. -Изъ точки внѣ плоскости можно опустить на послѣднюю только одинъ перпендикуляръ

Предложеніе

§ 338. *Линія, параллельная перпендикуляру къ плоскости, сама къ ней перпендикулярна.*

Положимъ, что CD параллельна AB, а AB перпендикулярна къ плоскости M; докажемъ, что CD также перпендикулярна къ M.

Плоскость, проведенная чрезъ двѣ параллельныя AB и CD пересѣчетъ плоскость M по линіи BD, потому что B и D принадлежатъ обѣимъ плоскостямъ. Прямая AB перпендикулярна въ плоскости M, слѣдовательно она перпендикулярна къ прямой BD, проведенной въ этой плоскости чрезъ ея основаніе (§ 332); поэтому въ плоскости ABDC прямая CD параллельная AB, будетъ перпендикулярна къ BD (§ 65). Чрезъ точку D проведемъ прямую FG перпендикулярно сѣченію BD; докажемъ, что *она перпендикулярна къ* CD



Фиг. 190.

Отложимъ отъ точки D, въ обѣ стороны произвольныя, но равныя части DF=DG, и проведемъ прямыя BF и BG; эти прямыя равны между собою какъ наклонныя равно удаленныя, въ плоскости M отъ основанія D перпендикуляра BD Точки F и G соединимъ съ какою нибудь точкою A перпендикуляра AB къ плоскости M получимъ AF=AG, какъ наклонныя равно удаленныя отъ основанія B перпендикуляра AB къ плоскости M Поэтому въ треугольникахъ ADF и ADG всѣ стороны попарно равны, слѣд. и сходственные углы равны, такъ уголъ ADF= ADG,—значитъ FG перпендикулярна къ DA. И такъ FG перпендикулярна къ двумъ прямымъ BD и DA проведеннымъ по плоскости ABDC, слѣд. она перпендикулярна и къ DC проведенной въ этой плоскости чрезъ основаніе D.

И такъ CD перпендикулярна къ FG и къ DB, т. е. къ двумъ линіямъ, проведеннымъ въ плоскости M слѣд она перпендикулярна къ самой плоскости M (§ 333)

Предложеніе

§ 339 *Перпендикуляры къ плоскости параллельны между собою.*

Пусть прямыя AB, CD и FG перпендикулярны къ плоскости M Чрезъ точку D вообразимъ линію параллельную къ прямой AB; она будетъ перпендикулярна къ плоскотси M (§ 338), слѣдовательно совпадетъ съ CD, потому что изъ точки на плоскости можно возставить одинъ только перпендикуляръ; поэтому CD параллельна AB Точно также докажется, что FG параллельна AB и CD такъ что всѣ перпендикуляры къ плоскости M попарно параллельны

Фиг 191.

Предложенie

§ 340. *Линiи, параллельныя одной и той же прямой, параллельны между собою*

Пусть CD и FÇ, порознь, параллельны прямой AB докажемъ что CD параллельна FÇ (фиг. 191).

Проведемъ плоскость M перпендикулярно къ прямой AB; какъ прямыя CD и FÇ параллельны AB, то онѣ перпендикулярны къ плоскости M (338) а слѣдовательно параллельны между собою (339)

Предложенie.

341. *Изъ точки, внѣ плоскости, можно опустить на послѣднюю перпендикуляръ и только одинъ.*

1) Пусть точка A дана внѣ плоскости M

Изъ какой нибудь точки D плоскости M возставимъ къ ней перпендикуляръ DC а чрезъ точку A проведемъ BA параллельно линiи CD эта прямая AB и будетъ искомый перпендикуляръ потому что прямая, параллельная перпендикуляру къ плоскости сама перпендикулярна къ этой последней.

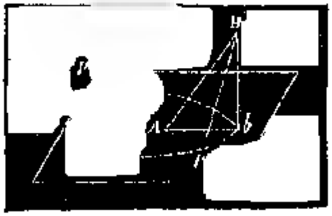
Фиг. 192

2) Остается доказать, что изъ точки A, внѣ плоскости M, можно опустить одинъ только перпендикуляръ Положимъ, что AF также перпендикулярна къ плоскости M. Плоскость, проведенная чрезъ эти два пересѣкающiеся перпендикуляра, встрѣтитъ плоскость M по линiи BF, потому что точки B и F лежатъ на обѣихъ плоскостяхъ; и такимъ образомъ получимъ въ плоскости ABF два перпендикуляра AB и AF къ прямой BF изъ точки A (§ 332), — а это невозможно.

§ 342. *Слѣдствiе.* Изъ точки можно опустить на плоскость одинъ только перпендикуляръ; всѣ другiя прямыя, соединяющiя эту точку съ различными точками плоскости, будутъ наклонныя и болѣе перпендикуляра (§ 337); поэтому *разстоянiе между точкою и плоскостью измѣряется перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ этой точки на плоскость*

Объ углѣ, составляемомъ прямою съ плоскостью

Положимъ, что прямая AB встрѣчаетъ плоскость P въ точкѣ A эта прямая AB образуетъ съ прямыми, проходящими на плоскости P чрезъ точку A различные углы; изъ всѣхъ этихъ угловъ наименьшій угол есть тотъ острый уголъ, который образуетъ данная прямая AB съ прямою, проходящею чрезъ точку A и чрезъ основаніе перпендикуляра Bb, опущеннаго на плоскость P изъ точки B данной прямой (прямая Ab называется проэкціею прямой AB на плоскость P). Въ самомъ дѣлѣ, принявъ точку



Фиг. 193 (a).

A за центръ и описавъ на плоскости P окружность радіусомъ Ab а потомъ, проведя на плоскости P произвольную прямую AC (C—точка встрѣчи этой прямой и окружности), видимъ, что въ треугольникахъ ABb и ABC сторона AB общая, Ab = AC, третья же сторона Bb < BC, поэтому и уголъ BAb < BAC Этотъ наименьшій и острый уголъ, который образуетъ прямая съ своею проэкціею на плоскости, называется *угломъ прямой съ плоскостью.*

---

14. Линія, проведенная параллельно прямой, находящейся въ плоскости, нигдѣ не встрѣчаетъ этой плоскости — Плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой, нигдѣ не встрѣчаются. — Двѣ плоскости, между собою параллельныя, пересѣкаются третьею плоскостью по линіямъ параллельнымъ. — Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна ко всѣмъ.

Предложенія

§ 343. *Линія, проведенная параллельно прямой, находящейся въ плоскости, нигдѣ не встрѣчаетъ этой плоскости.*

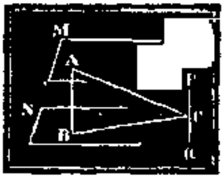
Пусть прямая CD лежитъ въ плоскости M, и AB параллельна ей Чрезъ двѣ параллельныя AB и CD проведемъ плоскость; она пересѣчетъ плоскость M по линіи CD; и такъ прямая AB, находясь въ плоскости ABDC и будучи параллельна CD не можетъ пересѣчь плоскости M

Фиг. 193

§ 344. Мы уже замѣтили (§ 325,3), что прямая называется параллельною къ плоскости, если она на всемъ протяженіи не встрѣчается съ нею. Поэтому *линія, проведенная параллельно прямой находящейся въ плоскости параллельна этой послѣдней*

Предложенie

§ 345. *Плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой, нигдѣ не встрѣчаются*



Фиг. 194.

Положимъ, что плоскости M и N перпендикулярны къ прямой AB, а точки A и B находятся на этихъ плоскостяхъ — A на M а B на N Если допустить, что плоскости M и N встрѣтятся, и какую нибудь точку C ихъ сѣченія PQ соединить съ точками A и B, то найдемъ, что AB перпендикулярна къ AC, потому что AC проходитъ по плоскости M чрезъ основанiе A перпендикуляра къ плоскости (§ 332); по той же причинѣ AB перпендикулярна къ BC: слѣдовательно въ плоскости ABC было бы опущено два перпендикуляра изъ точки C на прямую AC. Итакъ нельзя допустить что плоскости M и N встрѣтятся

§ 346. *Двѣ плоскости называются параллельными если онѣ не встрѣчаются, сколько бы ихъ ни продолжали*

И такъ *двѣ плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой, параллельны между собою*

Предложенie

§ 347. *Двѣ плоскости, между собою параллельныя, пересѣкаются третьею плоскостью по линiямъ параллельнымъ.*

Фиг 195

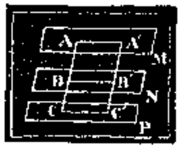
Пусть сѣченiя параллельныхъ плоскостей M и N третьею плоскостью будутъ AC и BD. Эти сѣченiя, находясь въ параллельныхъ плоскостяхъ, не могутъ встрѣтиться; притомъ онѣ и въ одной плоскости ABDC — слѣдовательно AC и BD параллельны одна другой

Предложенie

§ 348. *Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна ко всѣмъ остальнымъ*

Пусть плоскости M, N и P попарно параллельны, и AC перпендикулярна къ плоскости M, докажемъ что AC перпендикулярна къ плоскостямъ N и P.

Чрезъ прямую AC проведемъ какую нибудь плоскость, — она пересѣчетъ плоскости M, N и P по линіямъ параллельнымъ AA' BB' и CC': такъ какъ AC перпендикулярна къ AA' (§ 332) то она перепендикулярна и къ линіяхъ BB' и CC' (§ 66).



Фиг. 196.

Проведя какую нибудь другую плоскость чрезъ прямую AC найдемъ, что AC перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ по каждой изъ плоскостей N и P, слѣдовательно она перпендикулярна и къ самимъ плоскостямъ (§333).

§ 349. *Слѣдствіе. Двѣ плоскости параллельныя третьей, параллельны между собою* (фиг. 196)

Дѣйствительно, если плоскости P и N параллельны къ плоскости M то перпендикуляръ AC къ плоскости M будетъ перпендикуляромъ къ плоскостямъ N и P слѣдовательно эти плоскости параллельны между собою (§ 346)

---

15 Части параллельныхъ линій, отсѣкаемыя двумя паралельными плоскостями равны между собою. Когда стороны двухъ угловъ, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ, соотвѣтственно параллельны, то углы равны между собою, или, взятые вмѣстѣ, составляютъ два прямые угла, а плоскости ихъ взаимно параллельны. — Части двухъ прямыхъ, отсѣкаемыя тремя параллельными плоскостями, пропорціональны между собою

Предложеніе

§ 350 *Части параллельныхъ линій отсѣкаемыя двумя параллельными плоскостями, равны между собою*

Пусть плоскости M и N, а также прямыя AB и CD параллельны между собою; точки A, C, B и D означаютъ пересѣченія прямыхъ съ плоскостями

Фиг. 195.

Чрезъ двѣ параллельныя линіи AB и CD проведемъ плоскость; она разсѣчетъ параллельныя плоскости M и N по линіямъ параллельнымъ AC и BD и такъ въ плоскости ACDB части параллельныхъ AB и CD, отсѣкаемыя параллельными AC и DB, равны между собою

§ 351. *Слѣдствіе. Разстоянія между параллельными плоскостями повсюду одинаковы.*

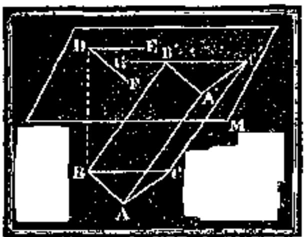
Въ самомъ дѣлѣ, перпендикуляры, возставленные изъ двухъ какихъ нибудь точекъ, взятыхъ на одной изъ параллельныхъ плоскостей, до пересѣченія съ другою плоскостью, равны между собою; потому что они параллельны и отсѣчены параллельными плоскостями.

Предложеніе.

§ 352. *Когда стороны двухъ угловъ, лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ, соотвѣтственно параллельны, то углы равны между собой, или, взятые вмѣстѣ, составляютъ два прямые угла а плоскости ихъ взаимно параллельны.*

Пусть AB и BC сотвѣтственно параллельны бокамъ A'B и BC

1) Докажемъ, что уголъ $ABC = A'B'C'$. Отложимъ $BA = B'A'$ и $BC = BC'$, и проведемъ прямыя AA, BB', CC, AC и' A'C. Прямыя AA и BB, соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ линій, равны между собою и параллельны, по той же причинѣ CC и BB равны между собою и параллельны Отсюда слѣдуетъ, что AA и CC' равны между собою и параллельны (§ 340), вслѣдствіе чего и $AC = A'C'$. слѣдовательно, въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$, три стороны одного равны тремъ сторонамъ другаго, — значитъ и сходственные углы равны $ABC = A'B'C'$.



Фиг. 197.

Уголъ $AB'C + ABG = 2D$ (D означаетъ прямой уголъ) слѣдовательно и $ABC + A'BG = 2D$.

2) Плоскости угловъ ABC и ABC параллельны между собою.

Изъ вершины B возставимъ перпендикуляръ къ плоскости ABC, до пересѣченія съ плоскостью M угла A'B C' въ точкѣ D чрезъ эту точку въ плоскости M, проведемъ DE и DF соотвѣтственно параллельныя B'C' и B'A', онѣ же будутъ параллельны бокамъ BC и BA (§ 340). Перпендикуляръ BD къ плоскости ABC — перпендикуляренъ къ прямымъ BC и BA, проведеннымъ по этой плоскости чрезъ основаніе B; стало быть BD перпендикулярна къ DE и DF, ибо онѣ соотвѣтственно параллельны линіямъ BC и BA И такъ, DB перпендикулярна къ плоскости M; значитъ двѣ плоскости M и ABC перпендикулярны къ прямой BD слѣдовательно онѣ параллельны между собою

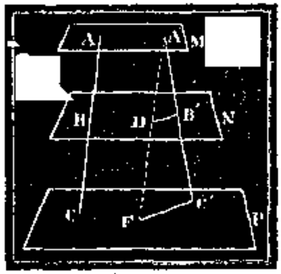
Опредѣленіе. Угломъ двухъ прямыхъ, которыхъ извѣстно положеніе въ пространствѣ, называется уголъ, образуемый прямыми, параллельными къ двумъ даннымъ и проведенными чрезъ какую нибудь точку пространства и имѣющими одинаковое направленіе съ данными.

Если даны двѣ прямыя и извѣстно ихъ направленіе, то уголъ образуемый этими прямыми, будетъ одинъ и тотъ же изъ какой бы точки ни построить этотъ уголъ (§ 352).

Предложеніе

§ 353. *Части двухъ прямыхъ, отсѣкаемыя тремя параллельными плоскостями, пропорціональны между собою*

Положимъ, что плоскости M, N и P параллельны между собою и двѣ прямыя AC и A'C' пересѣкаютъ ихъ въ точкахъ A, B C A', B' и C'. Докажемъ, что, напримѣръ, AB : A'B = BC · B C

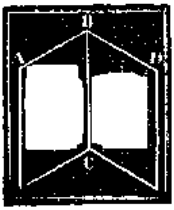


Фиг. 198.

Чрезъ точку A' проведемъ прямую A'F параллельно линіи AC, D и F означаютъ точки пересѣченія ея съ плоскостями N и P; плоскость, проведенная чрезъ двѣ пересѣкающіяся линіи A'C' и A'F, пересѣчетъ плоскости N и P по параллельнымъ линіямъ B D и C'F. И такъ въ треугольникѣ A C'F хорда B'D параллельна боку CF', слѣдоват. A'D:A B' = DF: B'C. Но части параллельныхъ AB и A D, а также BC и DF, отсѣченныя параллельными плоскостями, равны между собою, поэтому получимъ вставляя въ предъидущую пропорцію, вмѣсто A'D и DF имъ равныя, AB : A'B = BC . B'C'.

16. Двугранные углы, ребро, грань или сторона. — Измѣреніе двугранныхъ угловъ —Плоскости взаимно перпендикулярныя —Свойства двугранныхъ угловъ, происходящихъ отъ пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей какою ни есть плоскостью – Двѣ плоскости, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ перпендикуляръ къ другой, взаимно-перпендикулярны.—Перпендикуляръ къ общему пересѣченію двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, проведенный въ одной изъ нихъ, перпендикуляренъ къ другой. — Плоскость, перпендикулярная къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, перпендикулярна къ ихъ пересѣченію, и наоборотъ.

§ 354. *Двуграннымъ угломъ* называется пространство между двумя пересѣкающимися плоскостями, ограниченными линіею ихъ пересѣченія.



Фиг 199

Линія эта называется *ребромъ* а двѣ его плоскости—*гранями* или сторонами.

Двугранный уголъ означается четырьмя буквами двѣ среднія означаютъ ребро BC, а крайнія — какія нибудь двѣ точки A и D на его граняхъ. Если же при ребрѣ одинъ только уголъ, то его можно означить только двумя буквами, поставленными на ребрѣ. Поэтому двугранный уголъ между плоскостями AC и CD читается ABCD или DBCA или просто уголъ BC.

Отъ пересѣченія плоскости другою плоскостью, ограниченною ихъ пересѣченіемъ, т. е. непродолженною по другую сторону первой плоскости, образуются *два смежные двугранные угла*

Двугранные углы называются *противоположными* если обѣ грани одного составляютъ продолженіе граней другаго угла.

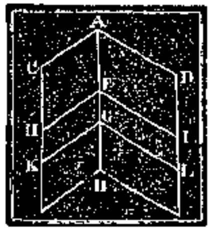
Очевидно, что два двугранные угла равны между собою, если ихъ ребра и грани совмѣщаются.

Если смежные двугранные углы равны между собою то каждый называется *прямымъ двуграннымъ угломъ*

Предложеніе

§ 355 *Если чрезъ какія нибудь точки, взятыя на ребрѣ двуграннаго угла, провесть плоскости перпендикулярныя къ ребру, то пересѣченія ихъ съ гранями угла образуютъ равные между собою углы.*

Возьмемъ двѣ точки Г и G на ребрѣ AB двуграннаго угла CABD и проведемъ плоскости HFI и KGL перпендикулярно къ AB. онѣ параллельны между собою; поэтому и пересѣченія ихъ FH и GK съ гранью CB также параллельны между собою. По той же причинѣ пересѣченія FI и GL также параллельны. И такъ бока угловъ HFI KGL параллельны, слѣдовательно углы равны, т. е. HFI—KSL (§ 352).



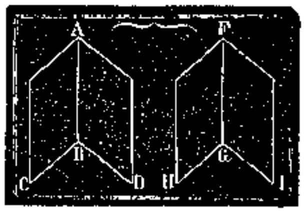
Фиг. 200

§ 356. *Уголъ* (HFI), *котораго бока перпендикулярны къ ребру и лежатъ въ граняхъ двуграннаго угла, называется угломъ наклоненія этого послѣдняго.* И такъ, для построенія угла наклоненія, надобно чрезъ какую нибудь точку ребра двуграннаго угла провесть къ нему два перпендикуляра, одинъ въ одной грани, а другой — въ другой грани· уголъ между этими перепендикулярами и будетъ уголъ наклоненія

Предложеніе

§ 357. *Два двугранные угла равны между собою если ихъ углы наклоненія равны.*

Пусть въ двугранныхъ углахъ CBAD и HGFI углы наклоненія CBD и HGI равны между собою. Такъ какъ CBD есть уголъ наклоненія то BD и BC перпендикулярны къ ребру AB и лежатъ въ его граняхъ; слѣдовательно ребро AB перпендикулярно къ плоскости CBD. По той же причинѣ ребро FG перпендикулярно къ плоскости HGI. На этомъ основаніи, если совмѣстить уголъ HGI съ угломъ CBD, то ребро GF пойдетъ по BA; иначе было бы возставлено два перпендикуляра къ плоскости CBD, слѣдовательно грань FGI совмѣстится съ гранью ABD потому что обѣ проходятъ чрезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя BA и BD; по той же причинѣ грань HGF совмѣстится съ ABC. И такъ двугранные углы FG и AB равны между собою.



Фиг. 201.

Предложеніе

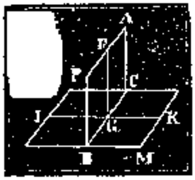
§ 358. Обратно, *въ равныхъ двугранныхъ углахъ, углы наклоненія равны*

И дѣйствительно, если совмѣстимъ равные двугранные углы, и построимъ въ разныхъ точкахъ ребра углы наклоненія то на основаніи § 352, найдемъ, что эти углы равны между собою

Предложеніе.

§ 359. *Въ двугранномъ прямомъ углѣ, уголъ наклоненія прямой*

Пусть уголъ PCBI прямой; значитъ онъ равенъ смежному съ нимъ углу PCBM. Чрезъ какую нибудь точку G ребра BC проведемъ IK въ плоскости M, и GF въ плоскости P—обѣ перпендикулярно къ ребру BC, — получимъ углы наклоненій FGK и FGI: они равны между собою потому что соотвѣтственные имъ двугранные углы равны (§ 358); поэтому FGK прямой.



Фиг 187

Предложеніе

§ 360. *Обратно: если уголъ наклоненія двуграннаго угла прямой, то и двугранный уголъ прямой.*

Пусть уголъ наклоненія FGK прямой, продолживъ грань CM и бокъ GK, получимъ двугранный уголъ PCBI и его уголъ наклоненія FGI; но уголъ FGI=FGK, ибо FGK—прямой; слѣдовательно двугранный уголъ PCBM=PCBI (§ 357) значитъ, каждый изъ нихъ прямой

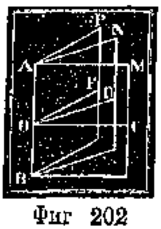
Предложеніе.

§ 361. *Прямые двугранные углы равны между собою*, потому что ихъ углы наклоненій прямые (§ 359), слѣдовательно равные между собою; а равенство угловъ наклоненій влечетъ равенство двугранныхъ угловъ

Предложеніе

§ 364 *Двугранные углы пропорціональны своимъ угламъ наклоненій.*

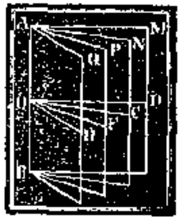
Возьмемъ какой нибудь двугранный уголъ NABM и построимъ его уголъ наклоненія DOC. Въ плоскости этого угла проведемъ прямую FO: получимъ уголъ FOC большій угла DOC. Проведя плоскость чрезъ FO и AB получимъ двугранный уголъ PABM, очевидно, большій угла NABM, а уголъ наклоненія его будетъ FOC, потому что



Фиг 202

AB, будуи перпендикулярна къ двумъ линіямъ OD и OC, перпенди кулярна и къ OF, проведенной въ плоскости DOC. Итакъ, съ увеличеніемъ угла наклоненія, увеличивается двугранный уголъ· въ этомъ состоитъ первое условіе пропорціональности (§ 201).

Въ плоскости угла наклоненія DOC отложимъ углы COF и F H равными DOC, а чрезъ AB и OH, AB и OF проведемъ плоскости: получимъ три равные двугранные угла MABN, NABP, PABQ потому что ихъ углы наклоненія равны. Поэтому съ увеличеніемъ угла наклоненія DOC, напримѣръ, втрое, и соотвѣтствующій ему двугранный уголъ MABN увеличивается также втрое: это второе условіе пропорціональности (§ 201).— И такъ двугранные углы пропорціональны ихъ угламъ наклоненія

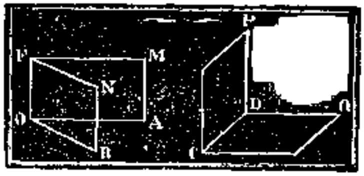


Фиг. 203

§ 363 *Слѣдствіе.* Если прямой двугранный уголъ CD принять за единицу для измѣренія двуграннаго угла FO то двугранный уголъ будетъ измѣряться его угломъ наклоненія AOB Дѣйствительно,

$$\frac{MFOB}{PDCQ}=\frac{AOB}{PDQ}$$

а изъ этого равенства слѣдуетъ, что число единицъ заключающихся въ углѣ AOB, когда прямой уголъ PDQ принятъ за единицу, равно числу единицъ заключающихся въ углѣ MFOB, когда PDCQ принятъ за единицу: слѣдовательно, *мѣра двуграннаго угла таже что и его угла наклоненія*



Фиг. 204.

Предложеніе

§ 364. *Сумма смежныхъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ.* (фиг 187).

Чрезъ какую нибудь точку G ребра BC двухъ смежныхъ двугранныхъ угловъ ACBI и ACBM проведемъ плоскости IGKF, перпендикулярную къ ребру BC; такимъ образомъ получимъ углы наклоненій FGK и FGI данныхъ двугранныхъ угловъ: сумма этихъ угловъ наклоненій равна двумъ прямымъ угламъ; но какъ двугранный уголъ измѣряется его угломъ наклоненія, а двумъ прямымъ линейнымъ угламъ соотвѣтствуютъ два прямые двугранные угла, то сумма двугранныхъ ACBI и ACBM равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ (§ 363).

§ 365. Точно также докажется, что

1) *сумма всѣхъ двугранныхъ угловъ по одну сторону плоскости, при общемъ ребрѣ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ.*

2) *сумма всѣхъ двугранныхъ угловъ, имѣющихъ общее ребро, равна четыремъ прямымъ двуграннымъ угламъ.*

Предложеніе

366. *При пересѣченіи двухъ параллельныхъ плоскостей какою нибудь сѣкущею плоскостью:*

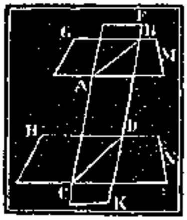
1) *внутренніе перекрестные двугранные углы равны,*

2) *внѣшніе перекрестные двугранные углы равны,*

3) *соотвѣтственные двугранные углы равны,*

4) и 5) *сумма внутреннихъ угловъ, а также сумма внѣшнихъ двугранныхъ угловъ, по одну сторону сѣкущей плоскости равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ*

Пусть плоскости M и N параллельны между собою, и разсѣчены плоскостью F; сѣченія AB и CD параллельны между собою (§ 347).



Фиг. 205.

Чрезъ какую нибудь точку B ребра AB проведемъ плоскость ΓBG, перпендикулярную къ нему: она же будетъ перпендикулярна и къ CD, какъ параллельной съ AB (§ 338); притомъ эта плоскость пересѣчетъ плоскости M и N по параллельнымъ линіямъ BG и DH Эти параллельныя съ сѣкующею FK образуютъ восемь угловъ наклоненій которые соотвѣтствуютъ восьми двугранным углам при ребрахъ AB и CD. Такъ какъ плоскіе углы внутренніе перекрестные, внѣшніе перекрестные и соотвѣтственные равны между собою, то двугранные углы тѣхъ же наименованій также равны. Такъ какъ плоскіе углы внѣшніе или внутренніе, по одну сторону сѣкущей линіи, составляютъ два прямые угла, то двугранные углы тѣхъ же наименованій даютъ въ суммѣ два прямыхъ двугранахъ угла

Примѣчаніе. Пять предложеній, обратныхъ здѣсь доказаннымъ, будутъ тогда только справедливы, когда ребра двугранныхъ угловъ будутъ параллельны

Перпендикулярныя плоскости

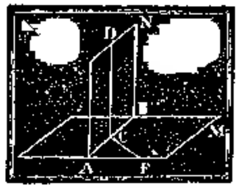
§ 367 *Перпендикулярною плоскостью* къ другой плоскости называется такая плоскость, которая съ другою образуетъ равные смежные углы: углы эти, какъ извѣстно —прямые двугранные, а углы ихъ наклоненія — плоскіе прямые.

Если плоскость, перпендикулярную къ другой плоскости, продолжить, то образуются четыре равные двугранные угла, потому что ихъ углы наклоненій будутъ прямые и, слѣдовательно, равны между собою. Поэтому каждая изъ этихъ плоскостей будетъ перпендикулярна къ другой такія плоскости называются *взаимно перпендикулярными.*

Предложеніе.

§ 368. *Двѣ плоскости, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ перпендикуляръ къ другой, взаимно перпендикулярны.*

Положимъ, что прямая CD перпендикулярна къ плоскости M, докажемъ, что плоскость N перпендикулярна къ M или что тоже, что уголъ наклоненія двуграннаго угла —прямой. Проведя въ плоскости M перпендикуляръ CF къ ребру AB, получимъ уголъ наклоненія DCF; потому CD, какъ перпендикуляръ къ плоскости M, перпендикулярна и ко всѣмъ линіямъ, AB, CF, проведеннымъ по плоскости чрезъ ея основаніе;



Фиг 206.

значитъ уголъ наклоненія DCF и соотвѣтствующій ему двугранный уголъ — прямые слѣдовательно плоскости N и M взаимно перпендикулярны

Предложеніе

§ 369. *Перпендикуляръ къ общему пересѣченію двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, проведенный въ одной изъ нихъ, перпендикуляренъ къ другой* (фиг. 206).

Пусть плоскости N и M взаимно-перпендикулярны, и прямая CD находящаяся въ плоскости N, перпендикулярна къ пересѣченію AB; докажемъ, что CD перпендикулярна и къ плоскости M.

Проведя въ плоскости M перпендикуляръ CF къ общему сѣченію AB, получимъ уголъ наклоненія DCF двуграннаго угла NABM· а какъ этотъ послѣдній, по условію, прямой уголъ, то и уголъ наклоненія DCГ (§ 359) также прямой. И такъ прямая CD перпендикулярна къ двумъ прямымъ AB и CГ, проведеннымъ по плоскости M чрезъ ея основаніе; слѣдовательно она перпендикулярна и къ самой плоскости M

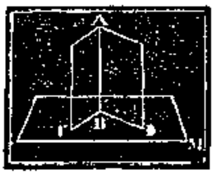
§ 370. *Слѣдствіе. Обратно: перпендикуляръ къ одной изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, проведенный чрезъ какую нибудь точку общаго ихъ пересѣченія, лежитъ въ другой плоскости* (фиг. 206,

Допустимъ, что перпендикуляръ, возставленный въ плоскости M изъ точки C, не лежитъ въ плоскости N, которая перпендикулярна къ M, тогда, проведя въ плоскости N перпендикуляръ CD къ пересѣченію AB; найдемъ, что онъ будетъ перпендикуляренъ къ плоскости M (§ 369), слѣдовательно, изъ одной точки C будутъ два перпендикуляра къ плоскости M —выводъ нелѣпый.

Предложеніе.

§ 371. *Плоскость перпендикулярная къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, перпендикулярна къ ихъ сѣченію.*

Пусть плоскость M перпендикулярна къ плоскостямъ ABC и ABD, докажемъ, что плоскость M перпендикулярна къ ихъ пересѣченію AB



Фиг 207

Изъ точки B, общей тремъ плоскостямъ, возставимъ перпендикуляръ къ плоскости M, — онъ долженъ лежать, въ одно время, на двухъ плоскостяхъ (§ 370) ABC и ABD слѣдовательно долженъ совпасть съ ихъ пересѣченіемъ AB

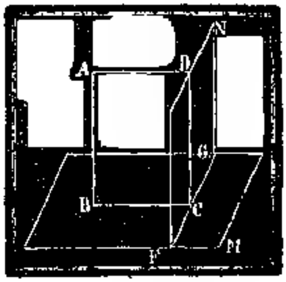
§ 372 *Обратно: плоскость, перпендикулярная къ пересѣченію двухъ плоскостей, перпендикулярна къ каждой изъ нихъ.*

Пусть плоскость M перпендикулярна къ пересѣченію AB плоскостей ABC и ABD. Каждая изъ этихъ плоскостей проходитъ чрезъ перпендикуляръ AB къ плоскости M, слѣдовательно и обѣ онѣ перпендикулярны къ плоскости M (§ 368)

Предложеніе

§ 373 *Плоскость, параллельная перпендикуляру, возставленному къ какой нибудь плоскости перпендикулярна къ этой послѣдней*

Пусть плоскость N параллельна прямой AB, которая перпендикулярна къ плоскости M, надобно доказать, что плоскость N перпендикулярна къ M Чрезъ прямую AB и какую нибудь точку C сѣченія FG плоскостей M и N проведемъ плоскость сѣченія ея CD съ плоскостью N будетъ параллельно AB, потому что AB, будучи параллельна N, никогда не встрѣтитъ прямой CD, притомъ обѣ онѣ въ одной плоскости Вслѣдствіе параллельности прямыхъ AB и CD, эта послѣдняя будетъ перпендикулярна къ плоскости M (§ 338), слѣдовательно плоскость N перпендикулярна къ M (§ 368)



Фиг 208

ОТДѢЛЪ ОСЬМОЙ

О многогранныхъ углахъ и о многогранникахъ.

---

17. Многогранные углы. — Всякій плоскій уголъ многограннаго угла менѣе суммы всѣхъ остальныхъ.—Въ многогранномъ углѣ съ углами исходящими, сумма всѣхъ плоскихъ угловъ менѣе четырехъ прямыхъ.—Равенство трегранныхъ угловъ.

§ 374 *Многограннымъ угломъ* называется пространство между нѣсколькими плоскостями проходящими чрезъ одну точку, въ которой онѣ и оканчиваются. Точка эта называется *вершиною* многограннаго угла, а линіи взаимнаго пересѣченія сосѣдственныхъ плоскостей—*ребрами* плоскости же—*гранями*. Многогранный уголъ именуется числомъ своихъ граней, такъ. *трегранный* уголъ -о трехъ граняхъ *четырегранный*—о четырехъ граняхъ и т. д

Части многограннаго угла суть. 1) ребра, 2) грани 3) плоскіе углы въ этихъ граняхъ, у нихъ общая вершина—въ вершинѣ многограннаго угла, и 4) двугранные углы которыхъ ребра составляютъ ребра многограннаго угла.

Многогранные углы равны между собою, если ихъ вершины и ребра соотвѣтственно совмѣщаются

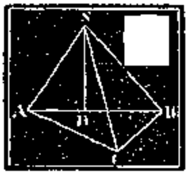
Предложеніе

§ 375. *Всякій плоскій уголъ многограннаго угла менѣе суммы всѣхъ остальныхъ плоскихъ угловъ.*

1) Разсмотримъ сперва трегранный уголъ $SABC$.

Предложеніе становится очевиднымъ, когда идетъ дѣло объ углѣ меньшемъ одного изъ остальныхъ двухъ угловъ или равномъ ему: потому что, если уголъ a меньше или равенъ углу b, то подавно онъ будетъ меньше угла b, сложеннаго съ третьимъ угломъ.

Положимъ, что уголъ ASB больше каждаго изъ остальныхъ угловъ ASC и BSC, и докажемъ, что $ASB<ASC+BSC$.



Фиг. 209.

Въ плоскости ASB построимъ уголъ $BSD=BSC$; прямая SD пройдетъ въ углѣ ASB, потому что этотъ уголъ больше угла BSC. Проведемъ сѣкущую ADB, которая встрѣтила бы всѣ три прямыя SA, SD и SB, отложимъ $SC=SD$, и проведемъ прямыя AC и BC.

Въ треугольникахъ BCS и BDS двѣ стороны равны, $SC=SD$, SB—общая, и углы между ними равны, $BSC=BSD$; слѣдовательно и остальныя сходственныя части равны, $BC=BD$. Прямая AB или $AD+BD$ меньше ломаной $AC+BC$; а отнявъ поровну, BD и BC получимъ $AD<AC$. Въ треугольникахъ ADS и ACS сторона $AD<AC$, $SD=SC$ и SA—общая; слѣдовательно уголъ $ASD<ASC$; придавъ къ обѣимъ частямъ этого неравенства поровну—къ первой части BSD, а ко второй BSC получимъ $ASD+BSD<ASC+BSC$ или $ASB<ASC+BSC$.

2) Разсмотримъ теперь многогранный уголъ $SABCDE$, въ которомъ больше трехъ граней.

Фиг. 210

Чрезъ ребра SE и SB, SE и SC проведемъ плоскости. Изъ трегранныхъ угловъ $SABE$, $SBCE$ и $SCDE$ послѣдовательно получимъ

$$\text{уголъ } ASB<ASE+BSE,$$
$$\text{»} \quad BSE<BSC+ESC,$$
$$\text{»} \quad ESC<CSD+ESD$$

сложивъ эти неравенства и отнявъ общіе члены отъ обѣихъ частей найдемъ $$SAB<ASE+BSC+CSD+ESD$$

Предложенie.

§ 376. *Въ многогранномъ углѣ, съ углами исходящими, сумма всѣхъ плоскихъ угловъ меньше четырехъ прямыхъ.*

Проведемъ плоскость ABCD, которая пересѣкла бы грани многограннаго угла S по линiямъ AB, BC, CD, AD. Изъ какой нибудь точки O взятой внутри многоугольника ABCD, проведемъ прямыя AO BO,... во всѣ вершины. При точкѣ O получимъ столько треугольниковъ, сколько ихъ при вершинѣ S, поэтому сумма угловъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины при O равна суммѣ угловъ треугольниковъ, которыхъ вершины при S Но въ трегранномъ углѣ A имѣемъ: $DAO + OAB$ или $DAB < DAS + BAS$ (§ 375); также при вершинѣ B трегранного угла имѣемъ: $ABO + OBC$ или $ABC < ABS + CBS$ и т. д. И такъ, сумма угловъ при основанiяхъ въ треугольникахъ, которыхъ вершины въ O меньше суммы угловъ при основанiяхъ въ треугольникахъ, которыхъ вершины въ S; поэтому сумма угловъ при вершинѣ O больше суммы угловъ при вершинѣ S. Но сумма угловъ при вершинѣ O равна четыремъ прямымъ; слѣдовательно сумма плоскихъ угловъ при вершинѣ S въ многогранномъ углѣ меньше четырехъ прямыхъ.

Фиг 211

Равенство трегранныхъ угловъ

Предложенie.

§ 377. *Трегранные углы равны между собою, если плоскiй уголъ и два прилежащiе двугранные углы одного равны плоскому углу и двумъ прилежащимъ къ нему двуграннымъ угламъ въ другомъ трегранномъ углѣ, и если, притомъ, части эти одинаково расположены*

Пусть въ трегранныхъ углахъ S и S' уголъ $ASB = A'S'B'$ и двугранные углы равны: $CASB = C'A'S'B'$ $CBSA = C'B'S'A'$

Вмѣстимъ уголъ S' въ S такъ, чтобы вершина S' совпала съ вершиною S и бока SA' и SB' совмѣстились бы съ боками SA и SB: грань A'S'C' пойдетъ по грани ASC потому что двугранный уголъ S'A' равенъ углу SA, — слѣдовательно ребро S'C' должно находиться на плоскости ASC, по равенству двугранныхъ угловъ S'B' и SB, грань B'S'C' пойдетъ по грани BSC и ребро S'C

Фиг 212

будетъ лежать на плоскости BSC. И такъ ребро SC, въ одно время должно быть на двухъ граняхъ ACS и BCS; слѣдовательно оно совпадетъ съ ихъ пересѣченіемъ SC поэтому трегранные углы равны

Предложеніе

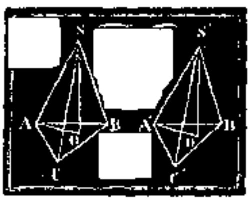
§ 378. *Трегранные углы равны между собою, если двугранный и два прилежащіе къ нему плоскіе угла въ одномъ равны двугранному углу и прилежащимъ къ нему двумъ плоскимъ угламъ другаго; и если притомъ, части эти одинаково расположены* (фиг. 212).

Положимъ, что двугранный уголъ $SA=S'A'$ и прилежащіе плоскіе углы равны $CSA=C'S'A'$, $ASB=A'S'B'$. Вмѣстимъ трегранный уголъ S' въ S такъ, чтобы вершина S' совпала съ S, и бока $S'B'$ и $S'A'$ совпали бы соотвѣтственно съ SB и SA; это всегда возможно, ибо уголъ $ASB=A'S'B'$; по равенству двугранныхъ угловъ $S'A'$ и SA, грань $A'S'C'$ пойдетъ по ASC, а какъ плоскіе углы $A'S'C'$ и ASC равны между собою то ребро $S'C'$ совмѣстится съ ребромъ SC И такъ трегранный уголъ S' равенъ углу S

Предложеніе

§ 379 *Трегранные углы равны между собою, если ихъ плоскіе углы порознь равны и одинаково расположены.*

Пусть плоскій уголъ $ASC=A'S'C'$ $BSC=B'S'C'$, $ASB=A'S'B'$

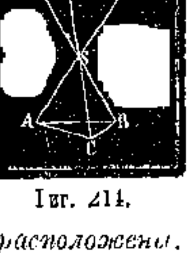


Фиг. 213

Отложимъ, по ребрамъ отъ вершинъ S и S' равныя части $SA=SB=SC=S'A'=S'B'=S'C'$ и проведемъ прямыя AB BC AC $A'B'$ $B'C'$ и $A'C'$

Въ треугольникахъ ASC и $A'S'C'$ между равными сторонами заключаются равные углы ASC и $A'S'C'$, слѣдовательно третьи стороны равны, $AC=A'C'$ Точно также докажется, что $AB=A'B'$ и $BC=B'C'$ поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ равны между собою. Пусть O и O' означаютъ центры круговъ, описанныхъ около этихъ треугольниковъ Опустимъ перпендикуляры изъ вершинъ S и S' на плоскости ABC и $A'B'C'$, они пройдутъ чрезъ центры O и O'. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ перпендикуляръ, опущенный изъ S на плоскость ABC, пересѣкъ ее въ какой нибудь точкѣ различной отъ O, то эта точка не отстояла бы одинаково отъ трехъ точекъ A B и C а слѣдовательно наклонныя SA, SB и SC не были бы равныя (§ 337),—что противно вышесказанному. Тоже заключеніе выведется и о прямой S'O'. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ASO и A'S'O' гипотенузы равны, AS=A'S' и катеты AO и A'O' равны, какъ радіусы круговъ описанныхъ около равныхъ треугольниковъ; слѣдовательно и SO=S'O'. Поэтому, если вмѣстимъ фигуру S'A'B'C' въ SABC такъ, чтобы треугольникъ A'B'C' совмѣстился съ ABC, то точка O совпадетъ съ O, и перпендикуляръ O S' пойдетъ по перпендикуляру OS; а какъ они равны, то вершина S совпадетъ съ S, а ребра SA, SB и SC соотвѣтственно совпадутъ съ ребрами S'A', S'B' и S'C'; слѣдовательно трегранные углы будутъ равны между собою

§ 380 *Примѣчаніе.* Возьмемъ трегранный уголъ SABC и продолжимъ его ребра, тогда по другую сторону вершины S образуется новый трегранный уголъ SA'B'C', плоскіе углы этихъ трегранныхъ угловъ равны между собою (§ 37), но они неодинаково расположены и этихъ трегранныхъ угловъ нельзя совмѣстить, не смотря на то, что и двугранные углы равны: AS=A'S', BS=B'S', CS=CS'. Такіе трегранные углы называются *симметрическими* И такъ, *два трегранные угла называются симметрическими, если ихъ части,* т. е. плоскіе и двугранные углы, *соотвѣтственно равны, но не одинаково расположены.*



Фиг. 214.

Предложеніе

§ 381. *Если изъ точки (S), взятой внутри трегранного угла (S), провесть на его грани (ASB, ASC и BSC) перпендикуляры (S'C', S'B', S'A'), а чрезъ каждые два перпендикуляра—плоскости, то изъ нихъ составится такой трегранный уголъ (S'), что 1) ребра каждаго изъ двухъ трегранныхъ угловъ (S и S') перпендикулярны къ гранямъ другаго; 2) плоскіе углы граней одного служатъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ двуграннымъ угламъ другаго.*

1) Ребро SA, напримѣръ, перпендикулярно къ грани B'S'C', у которой ребра предполагаются перпендикулярными къ гранямъ ASB и ASC, которыя пересѣкаются по ребру SA. Дѣйствительно, плоскость B'S C' въ одно время перпендикулярна къ двумъ плоскостямъ ASB и ASC (§ 368), а слѣдовательно и къ общему ихъ сѣченію SA (§ 371)

2) *Двугранный уголъ C S'B'A', котораго ребро S'B' перпендикулярно къ плоскости ASC, служитъ дополненіемъ углу ASC.* Въ самомъ дѣлѣ, ребро S'B' перпендикулярно къ сѣченіямъ AB' и B'C плоскости ASC съ плоскостями C'S'B' и A'S'B' значитъ уголъ AB C

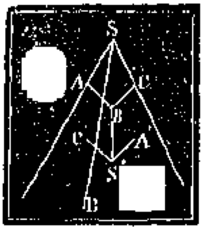
Фиг. 215

опредѣляетъ наклоненіе двуграннаго угла S'B'; но въ четвероугольникѣ SABC сумма угловъ равна четыремъ прямымъ, углы же A и C прямые, потому что ребра SA и SC перпендикулярны къ гранямъ B'S'C' и B'S'A', и такъ углы ASC и AB'C взаимно дополнительные до двухъ прямыхъ

Примѣчаніе. Трегранные углы S и S' называются *взаимно дополнительными*, потому что каждый плоскій уголъ одного дополнителенъ въ другомъ двугранному углу которого ребро перпендикулярно къ плоскости линейнаго угла.

Предложеніе.

§ 382. *Въ трегранномъ углу сумма двугранныхъ угловъ больше двухъ и меньше шести прямыхъ угловъ.*



Фиг 215.

Построимъ трегранный уголъ S', дополнительный данному углу S. Сумма двугранныхъ угловъ въ углу S, вмѣстѣ съ суммой плоскихъ угловъ треграннаго угла S', составитъ *шесть* прямыхъ значитъ сумма этихъ двугранныхъ угловъ меньше *шести* прямыхъ Но какъ сумма линейныхъ угловъ въ углу S' меньше четырехъ прямыхъ, то сумма двугранныхъ угловъ въ углу S болѣе *двухъ* прямыхъ, потому что обѣ суммы составляютъ только шесть прямыхъ угловъ.

Предложеніе.

§ 383. *Трегранные углы* (S и S') *равны между собой, если ихъ двугранные углы порознь равны и грани расположены одинаково.*

Построимъ углы T и T', дополнительные даннымъ трегранныхъ угламъ S и S Плоскіе углы трегранныхъ угловъ T и T' порознь равны (§ 381), а по § 379 и двугранные сходственные углы порознь равны; поэтому, въ данныхъ трегранныхъ углахъ сходственные плоскіе углы равны (§ 381), и притомъ они одинаково расположены, слѣдовательно трегранные углы равны между собой (§ 381)

---

18. Многогранники вообще, грани, ребра и вершины.—Простѣйшіе виды многогранниковъ: тетраэдръ, пирамида *полная* и *усѣченная*, *призма прямая* и *наклонная*, призма *усѣченная*, параллелопипедъ, кубъ или правильный шестигранникъ.—Измѣреніе поверхностей многогранниковъ. Поверхность призмы, включая основанія и безъ основаній—Равенство и подобіе многогранниковъ вообще, и въ особенности призмъ и пирамидъ.—Сравненіе поверхностей подобныхъ многогранниковъ.—Отношеніе между площадями сѣченій пирамиды плоскостями, параллельными ея основанію

§ 384. *Многогранникомъ* называется объемъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ плоскостями. Отъ взаимныхъ пересѣченій каждой плоскости со всѣми сосѣдственными плоскостями составляются многоугольники,—ихъ называютъ *гранями* многогранника. Бока граней называются *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника

Для ограниченія пространства плоскостями, надобны по меньшей мѣрѣ четыре плоскости, въ самомъ дѣлѣ, три плоскости, взаимно пере сѣкающіяся въ одной точкѣ, образуютъ трегранный уголъ, и тогда пространство остается неограниченнымъ; если жь разсѣчь этотъ уголъ плоскостью, проходящею чрезъ три точки, взятыя на его ребрахъ, то получится объемъ, ограниченный четырьмя треугольниками и называемый *четырегранникомъ* или *тетраэдромъ*.

Многогранникъ о пяти, шести и т. д. граняхъ называется *пятигранникомъ*, *шестигранникомъ* и т. д.

§ 385. Если многогранный уголъ разсѣчь плоскостью такъ, чтобы пространство его стало ограниченнымъ, то получится многогранникъ, называемый пирамидою.

Итакъ *пирамидою называется многогранникъ, у котораго одна грань какой нибудь многоугольникъ, а всѣ прочія грани — треугольники, которыхъ вершины сходятся въ одной точкѣ*. Эта точка называется *вершиною пирамиды*, а грань, противулежащая вершинѣ — *основаніемъ* ея; разстояніе между вершиною и основаніемъ называется *высотою пирамиды*.

На фигурѣ 210 представлена пирамида, которой основаніе пятиугольникъ ABCDE, а вершина въ точкѣ S. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на основаніе, будетъ высотою пирамиды.

Пирамида называется треугольною, четвероугольную и т. д., когда ея основаніе треугольникъ, четыреугольникъ и т. д. Очевидно, что треугольная пирамида есть тетраэдръ, и каждая его грань можетъ быть принята за основаніе пирамиды.

§ 386. Пирамида раздѣляется плоскостью, параллельно ея основанію, на двѣ части: одна часть составитъ пирамиду, которой основаніе есть многоугольникъ, образуемый сѣкущею плоскостью, а вершина — общая съ данною пирамидою; другая же часть, между параллельными плоскостями, называется *усѣченною пирамидою*, въ которой параллельные многоугольники называются *основаніями усѣченной пирамиды*, а разстояніе между ними *ея высотою*.

§ 387. *Пирамида* называется *правильною*, когда основаніе ея правильный многоугольникъ, а высота проходитъ чрезъ центръ этого многоугольника. Въ существованіи правильныхъ пирамидъ легко убѣдиться, стоитъ только вписать въ кругѣ или описать около него правильный многоугольникъ, изъ центра возставить перпендикуляръ къ плоскости многоугольника и какую нибудь точку этого перпендикуляра соединить съ вершинами полигона.

Предложеніе

§ 388. *Въ правильной пирамидѣ, прямыя, соединяющія вершину ея съ серединами боковъ основанія, равны между собою и перпендикулярны къ этимъ бокамъ*

Пусть O означаетъ центръ основанія ABCD; перпендикуляры OF, OE.., опущенные изъ центра O на стороны многоугольника, раздѣлятъ ихъ пополамъ и будутъ равны между собою, какъ радіусы круга, вписаннаго въ этомъ многоугольникѣ. Значитъ, SF, SE,... суть наклонныя къ плоскости, одинаково удаленныя отъ основанія O перпендикуляра SO, слѣдовательно они равны между собою. Прямая SF перпендикулярна къ боку AD, потому что въ треугольникахъ ASF и DSF стороны AF=FD, AS=DS, какъ наклонныя къ плоскости ABCD, равно удаленныя отъ основанія O и SF—общая, слѣдовательно уголъ AFS=DFS, и FS перпендикулярна къ AD

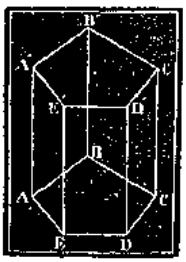
Фиг. 216.

Прямая, соединяющая вершину правильной пирамиды съ серединой какого нибудь бока основанія, называется *апоѳемою* пирамиды

§ 389. *Призмою называется многогранникъ, ограниченный с двухъ сторонъ параллельными гранями, и съ прочихъ плоскостями, которыя пересѣкаются послѣдовательно по линіямъ параллельнымъ между собою.*

(Чтобы убѣдиться въ существованіи призмы достаточно чрезъ вершины многоугольника ABCDE провесть прямыя, параллельныя между собою, и потомъ провесть плоскость A'B'C'D'E' параллельную ABCDE).

Эти параллельныя линіи называются *боковыми ребрами* призмы, а два многоугольника, ограничивающіе боковыя ребра, называются *основаніями* призмы; разстояніе же между основаніями называется *высотою*. Такъ, если плоскости AB', BC', CD', DE' и AE' пересѣкаются по линіямъ параллельнымъ AA', BB',...EE', и плоскости ABCDE и A'B'C'D'E' параллельны между собою то многогранникъ—призма. Параллельныя прямыя AA', BB', будутъ боковыя ребра, а многоугольники ABCDE и A'B'C'D'E'—основанія.



Фиг. 217.

§ 390 Боковыя ребра AA'. BB'... въ каждой призмѣ равны между собою, потому что они параллельны между собою и ограничены параллельными плоскостями (§ 350).

§ 391. Каждая грань призмы ABB'A', BCC'B',.. заключающаяся между боковыми ребрами, называется *боковою гранью* и *есть параллелограммъ*, потому что въ ней противуположныя стороны равны и параллельны, напримѣръ AA' равна и параллельна BB' (§ 106).

Основанія призмы равны между собою, потому что бока ихъ какъ противулежащія стороны параллелограммовъ, равны, эти же бока и параллельны, слѣдовательно и углы основаній соотвѣтственно равны (§ 332).

Призма называется треугольною, четвереугольною, ... когда ея основаніе треугольникъ, четвереугольникъ,....

§ 392. Призма называется *прямою* или *наклонною* смотря по тому *перпендикулярно* ли боковое ребро къ основанію призмы, или наклонно къ нему. Въ прямой призмѣ боковыя грани—прямоугольники (§ 332)

393. Если призму разсѣчь плоскостью параллельно основаніямъ, то каждая изъ полученныхъ частей будетъ также призма (§ 389), и слѣдовательно *сѣченіе, параллельное основаніямъ призмы, есть многоугольникъ имъ равный* (§ 391).

Сѣченіе, непараллельное основаніямъ призмы, раздѣляетъ ее на двѣ части, и каждая изъ нихъ называется *усѣченною призмою*.

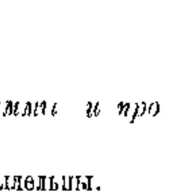
§ 394. *Параллелепипедомъ называется шестигранникъ, котораго противулежащія грани параллельны.*

Предложеніе

§ 395. *Грани параллелепипеда — параллелограммы и противулежащія изъ нихъ равны между собою.*

Пусть грани EG и AC, AF и DG, AH и BG параллельны.

1) Докажемъ, что, напримѣръ, грань ABCD параллелограммъ. Параллельныя плоскости AF и DG пересѣкаются плоскостью AC по параллельнымъ линіямъ AB и CD, параллельныя плоскости AH и BG тою же плоскостью разсѣкаются по параллельнымъ линіямъ BC и AD. И такъ въ четвероугольникѣ ABCD противулежащія стороны параллельны, слѣдовательно онъ параллелограммъ. Также докажется, что и остальныя пять граней параллелограммы.



218.

2) Въ противулежащихъ параллелограммахъ AC и EG двѣ смеж-

ныя стороны соотвѣтственно равны, AB=EF и BC=FG, какъ противулежащіе бока въ параллелограммахъ AF и BG, углы между этими сторонами также равны, ABC=EFG, ибо ихъ бока параллельны. И такъ параллелограммъ AC=EG Также докажется что грань AF=DG и AH=BG.

§ 396 Ребра параллелепипеда, AE, BF, CG и DH, параллельны между собою, потому что они составляютъ или противуположныя стороны параллелограммовъ, или параллельны одной и той же прямой; а какъ плоскости ABCD и EFGH параллельны между собою, то параллелепипедъ ABCDEFGH есть призма, въ которой ABCD и EFGH основанія.

Ребра AD BC, EH и FG тоже между собою параллельны, а равно и ребра AB, CD, EF и GH. Итакъ, вообще, параллелепипедъ есть призма, за основанія которой можно принять по произволу всякія двѣ противулежащія грани: онѣ же называются *основаніями параллелепипеда.*

Высотою параллелепипеда, какъ и призмы называется разстояніе между основаніями.

Параллелепипедъ называется прямымъ, если его ребро перпендикулярно къ основанію.

Параллелепипедъ называется *прямоугольнымъ*, если его основаніе прямоугольникъ, котораго плоскость парпендикулярна къ ребру

Въ прямомъ параллелепипедѣ основанія —параллелограммы а остальныя грани — прямоугольники.

Въ прямоугольномъ же параллелепипедѣ всѣ грани прямоугольники и слѣдовательно всѣ двугранные углы—прямые.

Наконецъ, параллелепипедъ называется *наклоннымъ* если всѣ его грани параллелограммы.

§ 397. Если три смежныя ребра прямоугольнаго параллелепипеда равны между собою, то всѣ его шесть граней будутъ квадраты, равные между собою, и тогда многогранникъ называется *кубомъ* или *правильнымъ шестигранникомъ*. Въ немъ плоскіе, а также двугранные углы—прямые и всѣ ребра равны между собою.

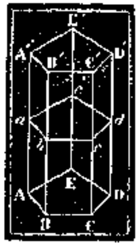
Измѣреніе поверхностей многогранниковъ

Предложеніе

§ 398 *Боковая поверхность всякой призмы равна произведе-*

нію одного изъ ея боковыхъ реберъ на периметръ перпендикулярнаго къ нему сѣченія.

Пусть $abcde$ означаетъ сѣченіе призмы, перпендикулярное къ боковымъ ребрамъ AA′, BB′ и т. д.; отсюда слѣдуетъ что ab перпендикулярно къ AA′, bc перпендикулярно къ BB и т. д. (§ 332) Вычисляя площади параллелограммовъ, составляющихъ *боковую поверхность* призмы, примемъ ребра AA′, BB ... за ихъ основанія; высотами будутъ прямыя ab, bc, и т д.; поэтому боковая поверхность призмы равна



фиг. 192

$$AA' . ab + BB' . bc + CC' . cd + \text{ и т д}$$

Но боковыя ребра равны между собою AA′=BB′=CC и т. д. (§ 390) —слѣдовательно, предъидущее выраженіе имѣетъ общимъ множителемъ AA′; отдѣлимъ его за скобки

$$AA' \; (ab + bc + cd + \ldots).$$

Множитель между скобками означаетъ периметръ сѣченія, перпендикулярнаго къ боковымъ ребрамъ; слѣдовательно предложеніе доказано

§ 399. *Слѣдствіе. Боковая поверхность прямой призмы равна произведенію периметра ея основанія на высоту;* потому что въ прямой призмѣ основаніе перпендикулярно къ боковому ребру а это послѣднее есть высота призмы.

Примѣчаніе. Здѣсь надобно припомнить замѣчаніе, сдѣланное въ первой части относительно измѣренія площадей (§ 254). Такъ, чтобы найти, напримѣръ, число квадратныхъ футовъ, содержащихся въ боковой поверхности прямой призмы надобно узнать, сколько разъ линейный футъ содержится въ периметрѣ основанія и въ боковомъ ребрѣ, и числа эти перемножить.

§ 400. Чтобы найти полную поверхность какой бы то ни было призмы, надобно къ боковой ея поверхности придать удвоенное основаніе

Предложеніе.

§ 401. *Боковая поверхность правильной пирамиды равна половинѣ произведенія ея периметра основанія на апоѳему пирамиды* (фиг. 216)

Боковую поверхность пирамиды SABCD составляютъ треугольники: ABS BCS,...,, за основанія ихъ возьмемъ стороны AB, BC,...; высоты треугольниковъ будутъ равныя между собою (§ 388): слѣдовательно боковая поверхность правильной пирамиды равна

$$AB.\frac{SF}{2} + BC\,\frac{SF}{2} + CD.\,\frac{SF}{2} + AD\,\frac{SF}{2},$$

или

$$(AB + BC + CD + AD)\;\frac{SF}{2}$$

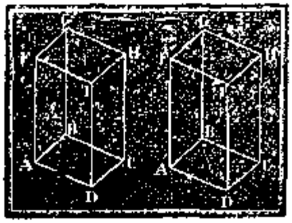
§ 402. Для полученія поверхности какого нибудь многогранника, надобно вычислить каждую грань (въ чемъ не будетъ затрудненія, потому что показано было, какъ найти площадь всякаго многоугольника) и взять сумму полученныхъ чиселъ.

Равенство многогранниковъ

Предложеніе.

§ 403. *Двѣ призмы равны между собою, если двугранный уголъ при основаніи и двѣ составляющія его грани въ одной равны двугранному углу при основаніи и двумъ гранямъ его составляющимъ въ другой; притомъ, если части эти одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ BC=B'C', грань ABCD=A'B'C'D' и BCHG=B'C'H'G'. Такъ какъ грани эти, по условію, одинаково расположены, то уголъ ABC=A'B'C' и CBG=C'B'G' —слѣдовательно, трегранные углы B и B' равны между собою (§ 378). Всѣ боковыя ребра въ обѣихъ призмахъ также равны, потому что изъ равенства граней BCHG и B'C'H'G' слѣдуетъ, что BG=B'G'. Вслѣдствіе этого, если вмѣстимъ призму A'B'C'D'H' въ призму ABCDH такъ, чтобы вершины основанія A'B'C'D' совпали съ вершинами основанія ABCD, то, по равенству трегранныхъ угловъ B и B', ребро B'G' пойдетъ по BG и точка G' совпадетъ съ G; остальныя же ребра лягутъ по соотвѣтствующимъ ребрамъ, напримѣръ A'F' по AF, въ противномъ случаѣ были бы двѣ параллельныя къ одной прямой, потому что всѣ боковыя ребра параллельны между собою; а, по равенству реберъ, вершины F', H', G' и I' совпадутъ съ F, H, G и I. Значитъ, всѣ грани обѣихъ призмъ совмѣстились, отсюда заключаемъ, что призмы равны между собою.



Фиг. 220.

§ 404. *Слѣдствіе. Двѣ призмы равны между собою, если три грани какого нибудь трегранного угла въ одной равны и одинаково расположены съ гранями трегранного угла въ другой.*

Пусть грань ABGF=A'B'G'F', ABCD=A'B'C'D' и BCHG=B'C'H'G'.

Грани эти, по условію, расположены одинаково; поэтому углы ABC=A'B'C', ABG=A'B'G' и CBG=C'B'G'. Итакъ, въ трегранныхъ углахъ B и B' плоскіе углы равны и одинаково расположены слѣдовательно трегранные углы равны и двугранный уголъ BC — B'C а какъ прилежащія къ нимъ грани равны и одинаково расположены то, на основаніи предъидущаго предложенія заключаемъ о равенствѣ призмъ

Предложеніе

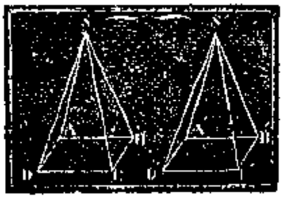
§ 405. *Прямыя призмы равны между собою, если ихъ основанія и высоты равны.*

Дѣйствительно, если вмѣстимъ одну призму въ другую такъ, чтобы основанія ихъ совмѣстились и каждая вершина совпала съ соответствующею ей вершиною, то боковыя ребра также совмѣстятся, потому что они перпендикулярны къ основаніямъ а по равенству этихъ реберъ, верхнія основанія тоже совмѣстятся.

Предложеніе

§ 406 *Двѣ пирамиды равны между собою, если двугранный уголъ при основаніи и двѣ составляющія его грани одной равны двугранному углу при основаніи и двумъ гранямъ другой, притомъ если части эти одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ AB = A'B', грань ABCD = A'B'C'D' ABS = A'B'S'. Вслѣдствіе одинаковаго расположенія граней, трегранный уголъ B = B' (§ 378); слѣдовательно, если совмѣстить основанія A'B'C'D' и ABCD, то ребро B'S' пойдетъ по BS; а, по равенству ихъ, вершина S' совпадаетъ съ S· слѣдовательно пирамиды равны между собою.



Фиг. 221

§ 407. *Слѣдствіе. Двѣ пирамиды равны между собою, если грани какого нибудь трегранного угла одной пирамиды равны и одинаково расположены съ гранями угла въ другой*

Пусть грань ABCD=A'B'C'D', ABS=A'B'S' и BCS=B'C'S'. Грани расположены одинаково; поэтому уголъ ABC=A'B'C', уголъ ABS=A'B'S', CBS=C'B'S', слѣдов. трегранные углы B и B' равны между собою, а съ тѣмъ вмѣстѣ двугранный уголъ AB=A'B', и какъ прилежащія къ нимъ грани равны, то и самыя пирамиды равны (§ 406)

Подобіе многогранниковъ

§ 408. *Два многогранника называются подобными, если двугранные углы одного порознь равны двуграннымъ угламъ другаго, грани ихъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ подобныхъ многогранникахъ многогранные углы соотвѣтственно равны. И дѣйствительно, вслѣдствіе подобія граней, плоскіе углы, при вершинѣ какого нибудь многограннаго угла, равны плоскимъ угламъ при вершинѣ въ другомъ многогранникѣ; двугранные углы въ этихъ многогранныхъ углахъ соотвѣтственно равны, по опредѣленію, притомъ части эти одинаково расположены — слѣдовательно многогранные углы можно совмѣстить.

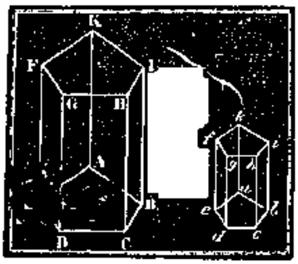
Ребра, соединяющія вершины равныхъ угловъ въ подобныхъ многогранникахъ, называются *сходственными ребрами.*

Сходственныя ребра подобныхъ многогранниковъ пропорціональны, потому что они суть сходственные бока подобныхъ многоугольниковъ.

Предложеніе

§ 409. *Двѣ призмы подобны, если двугранный уголъ при основаніи въ одной равенъ двугранному углу при основаніи въ другой, а грани, составляющія эти углы, соотвѣтственно подобны и одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ $AB = ab$, грани $ABIK$ и $ABCDE$ подобны гранямъ $abik$ и $abcde$. По условію, эти грани расположены одинаково; слѣдовательно уголъ $BAE = bae$ и $BAK = bak$: значитъ, въ трегранныхъ углахъ A и a двугранные углы AB и ab равны, прилежащіе къ нимъ плоскіе углы равны и одинаково расположены; поэтому и трегранные углы равны. Вслѣдствіе этого равенства двугранный уголъ $AK = ak$, двугранный уголъ $AE = ae$ и плоскій уголъ $KAE = kae$; сверхъ того изъ подобія граней слѣдуетъ:



Фиг. 222

$$AK : ak = AB : ab,$$
$$AE : ae = AB : ab$$

отсюда

$$AK : ak = AE : ae,$$

такимъ образомъ въ параллелограммахъ АГ и af между пропорціональными боками находятся равные углы, слѣдовательно эти параллелограммы подобны

Примѣняя къ двуграннымъ угламъ АЕ и ac, и гранямъ, его составляющимъ, все сказанное относительно двугранныхъ угловъ АВ и ab, и граней ихъ составляющихъ, найдемъ, что трегранные углы Е и e равны, а вслѣдствіе этого и двугранные углы EF и cf, ED и ed также равны, притомъ грани DГ и df подобны. Продолжая эти послѣдовательныя разсужденія, найдемъ: 1) что въ обѣихъ призмахъ двугранные углы, образуемые боковыми гранями между собою и съ нижними основаніями, равны между собою; остальные же двугранные углы, образуемые верхними основаніями съ боковыми гранями, равны, потому что они служатъ дополненіями до двухъ прямыхъ двугранныхъ угловъ угламъ при нижнихъ основаніяхъ а эти послѣдніе равны между собою. 2) Боковыя грани въ обѣихъ призмахъ подобны. нижнія основанія подобны по условію, а верхнія, какъ соотвѣтственно равныя нижнимъ, тоже подобны И такъ въ обѣихъ призмахъ двугранные углы соотвѣтственно равны, всѣ грани подобны и одинаково расположены: слѣдовательно призмы подобны

§ 410. *Слѣдствіе 1. Двѣ прямыя призмы подобны, если основанія ихъ подобны и высоты пропорціональны сходственнымъ бокамъ основаній.*

Дѣйствительно, двугранные углы при основаніяхъ—прямые (§ 392), поэтому, напримѣръ, двугранный уголъ $AB = ab$; по условію, высоты пропорціональны сходственнымъ бокамъ основаній, — слѣдовательно $AK : ak = AB : ab$; поэтому прямоугольники AI и ai подобны; основанія же, по условію, подобны И такъ двѣ прямыя призмы удовлетворяютъ условіямъ предъидущаго предложенія, слѣдовательно онѣ подобны.

§ 411. *Слѣдствіе 2 Два прямоугольные параллелепипеда подобны, если три ребра трегранного угла въ одномъ пропорціональны такимъ же ребрамъ въ другомъ.*

Дѣйствительно, всѣ двугранные углы равны, какъ прямые, а грани ихъ—подобные прямоугольники (§ 225); слѣдовательно параллелепипеды эти удовлетворяютъ опредѣленію подобныхъ многогранниковъ.

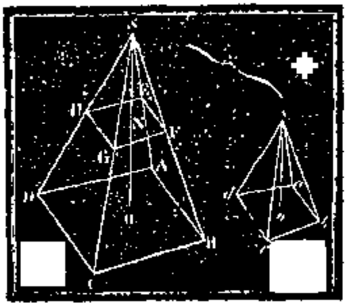
§ 412 *Слѣдствіе 3 Всѣ кубы подобны между собою.* потому что всѣ двугранные углы прямые и слѣдовательно равные между собою; грани же подобны потому что квадраты всегда подобны (§ 224)

Слѣдствіе 1. Двѣ призмы подобны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной, подобны и одинаково расположены съ тремя гранями, составляющими трегранный уголъ въ другой. Дѣйствительно, если грань ABCDE подобна *abcde*, AF подобна *af*, AI подобна *ai* и одинаково расположены, то плоскіе углы при вершинахъ A и *a* трегранныхъ угловъ соотвѣтственно равны, а слѣд. и двугранные углы равны; итакъ двугранный уголъ AB $=$ *ab*, грань ABCDE подобна *abcde*, грань AI подобна *ai*, притомъ грани эти одинаково расположены, слѣд. призмы подобны (§ 409).

Предложеніе.

§ 413. *Двѣ пирамиды подобны, если двугранный уголъ при основаніи въ одной равенъ двугранному углу при основаніи въ другой, и грани, составляющія эти углы, подобны и одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ AB$=$*ab*, а грани ABCD и *abcd*, ABS и *abs* подобны. Вслѣдствіе одинаковаго расположенія граней, уголъ BAD$=$*bad*, BAS$=$*bas* и какъ двугранный уголъ AB$=$*ab*, то трегранный уголъ A$=$*a* (§ 378); поэтому двугранные углы SA$=$*sa* и AD$=$*ad*, притомъ плоскій уголъ SAD$=$*sad*. Изъ подобія граней, прилежащихъ къ двугранному углу, имѣемъ



Фиг 223.

$$SA : sa = AB : ab$$
$$AD : ad = AB : ab$$

отсюда

$$SA : sa = AD : ad.$$

Поэтому въ треугольникахъ ASD и *asd* между двумя пропорціональными сторонами лежатъ равные углы SAD$=$*sad* слѣдовательно треугольники подобны.

Ясно, что все сказанное здѣсь о двугранныхъ углахъ AB и *ab*, и прилежащихъ къ нимъ граняхъ относится также къ двуграннымъ угламъ AD и *ad*. И дѣйствительно: они равны, а грани, къ нимъ прилежащія, подобны и одинаково расположены; слѣдовательно двугранные углы SD$=$*sd*, CD$=$*cd* и треугольникъ CDS подобенъ *cds*. Продолжая такимъ образомъ, найдемъ, что двугранные углы въ обѣихъ пирамидахъ равны а всѣ грани подобны и одинаково расположены —слѣдовательно, пирамиды подобны.

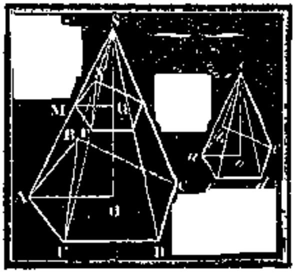
Слѣдствіе. Двѣ пирамиды подобны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной, подобны и одинаково расположены съ тремя гранями составляющими трегранный уголъ въ другой.

Дѣйствительно, если грань ABCD подобна *abcd*, ABS подобна *abs*, ADS подобна *ads*, притомъ грани эти одинаково расположены, то плоскіе углы трегранчаго угла A равны угламъ трегранчаго угла *a*, а вслѣдствіе этого равенства и одинаковаго расположенія упомянутыхъ угловъ, двугранный уголъ AB=двуг. уг. *ab* (§ 379); итакъ въ двухъ пирамидахъ двугранные углы при основаніи равны, уг. AB=уг. *ab*, грани составляющія эти углы подобны, ABCD подобны *abcd*, ADS подобны *abs*, слѣд. пирамиды подобны.

Предложеніе

§ 414. *Въ подобныхъ пирамидахъ сходственныя ребра пропорціональны высотамъ.*

Пусть пирамиды ABCDFS и *abcdfs* подобны между собою, докажемъ что $SO:so=AS:as$. Отложимъ $SM=sa$, $SP=sf$ и $SN=sb$, и чрезъ точки M, N и P проведемъ плоскость; она будетъ параллельна плоскости ABF. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе подобія данныхъ пирамидъ. $SA:sa=SF:sf$, или $SA:SM=SF:SP$ значитъ MP параллельна AF; по той же причинѣ MN параллельна AB, т. е. бока угловъ NMP и BAF параллельны, — слѣдовательно плоскость MNP параллельна основанію пирамиды. Пирамиды SMNP и *sabf* равны (§ 406); ибо вслѣдствіе подобія пирамидъ, двугранный уголъ $SM=sa$, треугольникъ $SMP=saf$, потому что бокъ $MS=as$, уголъ $MSP=asf$ и уголъ SMP, равный SAF, равенъ также *saf*; также докажется, что треугольникъ $MNS=sab$. Равныя пирамиды SMNP и *sabf* совмѣщаются,— причемъ и высоты ихъ совмѣстятся, т. е. $SQ=so$.

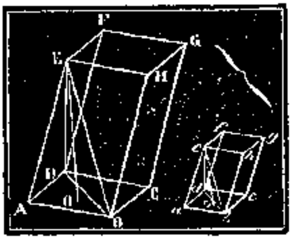


Фиг. 224

Наконецъ, плоскость, проведенная чрезъ двѣ линіи AS и SO, пересѣчетъ параллельныя плоскости по линіямъ MQ и AO параллельнымъ между собою; слѣдовательно $SO:QS=AS:SM$, или $SO:so=AS:as$.

§ 415. *Слѣдствіе. Въ подобныхъ призмахъ сходственныя ребра пропорціональны высотамъ*

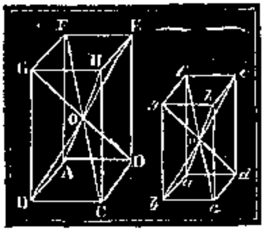
Пусть призмы ABCDG и *abcdg* подобны; проведемъ высоты EO и *eo*, и докажемъ напримѣръ что EO : *eo* = AE : *ae*.


Фиг 225.

Проведя плоскости чрезъ прямыя DE и BE, *de* и *be*, получимъ подобныя пирамиды EABD и *eabd*: въ самомъ дѣлѣ — двугранный уголъ AE=*ae*, треугольники ABE и *abe* ADE и *ade* подобны и одинаково расположены, потому что подобные многоугольники разбиваются на треугольники подобные. А въ подобныхъ пирамидахъ ребра пропорціональны высотамъ, слѣдовательно EO:*eo*=AE:*ae*.

Предложеніе

§ 416 *Два подобные многогранника можно разбить на подобныя и одинаково расположенныя пирамиды*


Фиг 226.

Пусть многогранники ABCDG и *abcdg* подобны. Чрезъ какую нибудь точку O, взятую внутри перваго многогранника, и всѣ ребра проведемъ плоскости; отъ взаимнаго ихъ пересѣченія получимъ столько пирамидъ OABCD, OABGF,.. сколько граней въ данномъ многогранникѣ; грани эти будутъ основаніями пирамидъ, а вершиною для всѣхъ будетъ точка O. Чрезъ ребро *ab*, сходственное съ AB, проведемъ плоскость *abo*, которая бы съ плоскостью *abcd* составила уголъ, равный двугранному углу OABC въ плоскости *abo* нанесемъ уголъ *bao*=BAO и уголъ *abo*=ABO.

Изъ точки *o* разобьемъ второй многогранникъ на пирамиды *abcdo*, *abgfo*..., подобно тому, какъ это сдѣлано съ первымъ многогранникомъ. Пирамиды OABCD и *oabcd* подобны, потому что у нихъ двугранный уголъ OABC=*oabc* и грани, ихъ составляющія ABCD и *abcd* ABO и *abo*, подобны.

Теперь обратимся къ пирамидамъ OABFG и *oabfg*. Такъ какъ углы ГABC и *fabc* данныхъ многогранниковъ равны, углы OABC и *oabc* также равны, то разности ихъ, т. е. двугранные углы OABG и *oabg* равны Грани ихъ составляющія подобны: ABO и *abo*, ABGF и *abgf*. Перейдемъ къ слѣдующимъ пирамидамъ OGHEF и *oghef*: двугранные углы AGFE и $agfe$ данныхъ многогранниковъ равны, углы OGFA и $ogfa$ также равны, вслѣдствіе подобія прежнихъ пирамидъ: слѣдовательно и разности ихъ OGFE $ogfe$ равны между собою; грани, составляющія эти углы OFG и ofg, подобны —какъ грани подобныхъ вторыхъ пирамидъ, а грани GHEF и $ghef$ подобны — какъ грани данныхъ многогранниковъ и т д

Предложеніе

§ 417. *Поверхности подобныхъ многогранниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ реберъ*

Пусть Q, Q', Q'' .., означаютъ площади граней одного многогранника, q, q', q''.....—площади соотвѣтственныхъ имъ граней другаго многогранника, который подобенъ первому; положимъ еще, что A и a означаетъ сходственныя ребра въ обоихъ многогранникахъ.

Такъ какъ площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ боковъ, а такіе бока, или ребра въ подобныхъ многогранникахъ, пропорціональны, — слѣдовательно и квадраты ихъ пропорціональны· поэтому

$$Q : q = A^2 : a^2$$
$$Q' : q' = A^2 : a^2$$
$$Q'' : q'' = A^2 : a^2$$

и т. д

отсюда $Q : q = Q' : q' = Q'' : q'' =$

слѣдовательно $\dfrac{Q+Q'+Q''+\ldots\ldots}{q+q'+q''+\ldots\ldots} = \dfrac{Q}{q} = \dfrac{A^2}{a^2}$.

Предложеніе

§ 418. *Площади основанія пирамиды и сѣченія, къ нему параллельнаго, пропорціональны квадратамъ разстояній этихъ плоскостей до вершины пирамиды* (фиг. 223).

Пусть сѣченіе EFGH параллельно основанію SO перпендикулярно къ нему· докажемъ что

$$ABCD : EFGH = \overline{SO}^2 : \overline{SN}^2.$$

1) Многоугольники ABCD и EFGH подобны Въ самомъ дѣлѣ углы ихъ соотвѣтственно равны, потому что бока ихъ параллельны, напримѣръ AB параллельна EF, какъ пересѣченія параллельныхъ плоскостей плоскостью ABS Вслѣдствіе параллельности прямыхъ AB и EF BC и FG, , имѣемъ

$$AB : EF = AS : ES,$$
$$BC : FG = BS : FS, \text{ и т. д.}$$

По равенству вторыхъ отношеній, и первыя равны, т. е. $AB : EF = BC : FG = \ldots$. Такимъ образомъ бока многоугольниковъ пропорціональны слѣдовательно—многоугольники подобны.

2) Извѣстно, что площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ боковъ; значитъ

$$ABCD : EFGH = \overline{AB}^2 : EF^2.$$

Проведя плоскость чрезъ высоту SO и ребро AS, получимъ параллельныя сѣченія AO и EN; слѣдовательно $SO : SN = AS : ES$, или $SO : SN = AB : EF$; возвысивъ члены этой пропорціи въ квадратъ, и сравнивъ полученный выводъ съ предъидущею пропорціею, найдемъ

$$ABCD : EFGH = SO^2 : SN^2$$

§ 419. *Слѣдствіе 1. Въ двухъ пирамидахъ, имѣющихъ равныя высоты, площади сѣченій, параллельныхъ основаніямъ и равноотстоящихъ отъ вершинъ, пропорціональны основаніямъ.*

Дѣйствительно, составивъ пропорціи, выражающія отношенія основанія къ сѣченію въ каждой пирамидѣ, найдемъ, что эти пропорціи имѣютъ по равному отношенію квадрата высоты пирамиды къ квадрату разстоянія вершины до сѣченія.

§ 420. *Слѣдствіе 2. Въ двухъ пирамидахъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, площади сѣченій, параллельныя основаніямъ и равно-отстоящія отъ вершинъ равномѣрны между собою.*

И дѣйствительно, если Q и Q' означаютъ равномѣрныя основанія двухъ пирамидъ, имѣющихъ одинаковыя высоты, а q и q'—сѣченія, параллельныя основаніямъ и равно-отстоящія отъ вершинъ, то $Q : q = Q' : q'$, но $Q = Q'$, слѣдовательно $q = q'$.

Измѣреніе объемовъ многогранниковъ

19. Объемъ тѣла.—Отношеніе объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ при равныхъ основаніяхъ. Отношеніе объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ вообще.—Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда. — Равномѣрность параллелепипедовъ при равныхъ основаніяхъ и высотахъ.— Объемъ какого ни есть параллелепипеда.—Отношеніе объемовъ двухъ параллелепипедовъ.

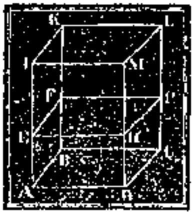
§ 421. *Объемомъ* тѣла, какъ извѣстно, называется пространство занимаемое этимъ тѣломъ. Когда тѣло есть пустой сосудъ, то названіе объемъ часто замѣняютъ словомъ *вмѣстимость*. Тѣла, различныя по виду и, слѣдовательно, несовмѣстимыя, очевидно, могутъ быть равны по объему. Такія тѣла называются *равномѣрными*.

За единицу при измѣреніи объемовъ принимается кубъ, котораго ребро равно линейной единицѣ: такъ, если ребро куба есть футъ, дюймъ и т. п. то кубъ называется кубичнымъ футомъ, кубичнымъ дюймомъ и т. п.

Предложеніе.

§ 422. *Объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны своимъ высотамъ.*

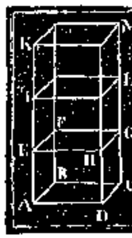
Пусть ABCDP прямоугольный параллелепипедъ: за основаніе его примемъ ABCD; высота будетъ AE. Увеличимъ высоту, для этого на продолженной AE возьмемъ какую нибудь длину AI, которая больше AE. Проведя чрезъ точку I плоскость, параллельную основанію, до пересѣченія съ продолженными боковыми гранями, получимъ прямоугольный параллелепипедъ AL. Дѣйствительно, грани многогранника AL попарно параллельны, слѣдовательно онъ параллелепипедъ; основаніе его ABDC—прямоугольникъ, котораго плоскость перпендикулярна къ ребру AI, слѣдовательно AL прямоугольный параллелепипедъ, и, очевидно—онъ больше даннаго параллелепипеда AP. Итакъ съ увеличеніемъ высоты прямоугольнаго параллелепипеда увеличивается его объемъ—это первое условіе пропорціональности (§ 201).



Фиг 227.

Увеличимъ высоту AE, напримѣръ, въ 3 раза. для этого на продолженной высотѣ AE отложимъ EI=KI=AE, и чрезъ точки I и K проведемъ плоскости II и KM параллельно основанію ABCD

Тѣми же разсужденіями, которыми выведено первое условіе пропорціональности, замѣтивъ только, что сѣченіе IL и KM равны ABCD какъ сѣченія параллельныя основанію ABCD призмы AG,—докажемъ, что многогранники EL и IM суть прямоугольные параллелепипеды, и оба они равны AG,—потому что прямоугольные параллелепипеды при равныхъ основаніяхъ и высотахъ равны между собою



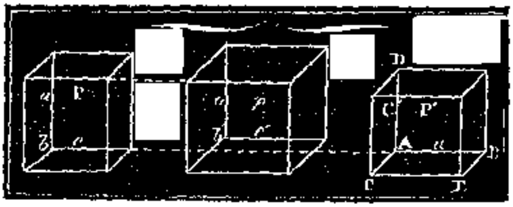
Фиг. 228.

слѣдовательно параллелепипедъ AM втрое больше параллелепипеда AG И такъ съ увеличеніемъ втрое высоты параллелепипеда увеличится также втрое соотвѣтствующій объемъ, — это второе условіе пропорціональности (§ 201) И такъ объемы параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, дѣйствительно пропорціональны высотамъ.

Предложеніе

§ 423. *Объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны основаніямъ.*

Пусть P и p означаютъ прямоугольные параллелепипеды, имѣющіе общую высоту a и положимъ, что b и c, b' и c' означаютъ бока основаній этихъ параллелепипедовъ докажемъ, что $P : p = bc : b'c$ Построимъ параллелепипедъ P' по тремъ прямымъ a, b и c'; для этого построимъ прямой уголъ BAC и отложимъ $AB = a$, $AC = b$



Фиг. 229

а изъ точки A возставимъ къ плоскости BAC перпендикуляръ $AD = c'$ наконецъ, чрезъ точки B, C и D проведемъ плоскости параллельныя гранямъ трегранпаго угла A, получимъ параллелепипедъ (§ 359), онъ прямоугольный, потому что въ параллелепипедѣ ABDC уголъ BAC прямой слѣдовательно ABEC — прямоугольникъ, притомъ плоскость его перпендикулярна къ ребру AD

Прямоугольные параллелепипеды P и P' имѣютъ равныя основанія которыхъ бока суть a и b слѣдовательно ихъ объемы пропорціональны высотамъ c и c

$$P . P = c \quad c'$$

Параллелепипеды P' и p имѣютъ равныя основанія, которыхъ бока суть a и c' слѣдовательно ихъ объемы пропорціональны высотамъ b и b' т е

$$P \quad p = b . b'$$

Перемноживъ эти пропорціи и сократикъ общій множитель P первыхъ двухъ членовъ, получимъ

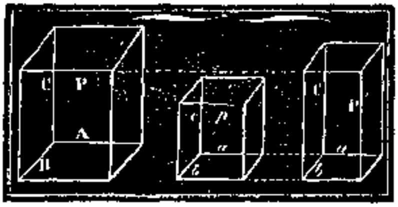
$$P \quad p = bc \quad b c$$

Предложенiе

§ 424: *Прямоугольные параллелепипеды вообще пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

Пусть P и p означаютъ прямоугольные параллелепипеды которыхъ ребра трегранныхъ угловъ суть A B и C въ первомъ и a b и c во второмъ.

Докажемъ что $P . p$—AB. C $ab. c$, ибо A . B и $a . b$ выражаютъ площади основаній параллелепипедовъ. Построимъ третій параллелепипедъ P' по тремъ ребрамъ a, b и C (самое построеніе производится, какъ было показано въ предъидущемъ предложенiи).



Фиг. 230

Параллелепипеды P и P имѣютъ равныя высоты C, слѣдовательн объемы ихъ пропорціональны основаніямъ, т е

$$P : P' = AB : ab$$

Прямоугольные параллелепипеды P и p имѣютъ равныя основания ab слѣдовательно объемы ихъ пропорціональны высотамъ, т е.

$$P' \quad p = C : c$$

Перемноживъ эти пропорціи, найдемъ

$$P : p = ABC \quad abc \quad ..(1)$$

или

$$\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab} \quad \frac{C}{c} \quad (2)$$

или

$$\frac{P}{p} = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b} \cdot \frac{C}{c} \dots \quad (3)$$

Послѣднее равенство доказываетъ, что *объемы прямоугольныхъ параллелепипедовъ пропорціональны произведенію отношеній трехъ различныхъ реберъ одного параллелепипеда къ ребрамъ другаго*; и такимъ образомъ нахожденіе отношенія объемовъ двухъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ замѣняется отыскиваніемъ отношеній прямыхъ линій

Предложенiе

§ 425. *Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію его основанія на высоту.*

Пусть V означаетъ объемъ A B и C ребра трегранного угла въ прямоугольном параллелепипедѣ, положимъ, что v означаетъ объемъ и a ребро куба, принятаго за 1-цу для измѣренія объемовъ, слѣдовательно a принимается также за 1-цу. На основаніи предъидущаго предложенія имѣемъ

$$\frac{V}{v} = \frac{A}{a} \times \frac{B}{a} \times \frac{C}{a}$$

Отношенія $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{a}$ и $\frac{C}{a}$ найдутся измѣрявъ ребра A, B и C единицею a и какъ обыкновенно 1-ца не пишется дѣлителемъ то, предъидущее выраженіе приметъ такой видъ:

$$\frac{V}{v} = A \times B \times C,$$

или

$$\frac{V}{v} = AB \times C.$$

гдѣ произведеніе AB можно принять за площадь основанія параллелепипеда, C будетъ его высота, а произведеніе AB$\times$C покажетъ, сколько разъ кубъ v содержится въ данномъ параллелепипедѣ. А какъ $v = 1$ то получимъ

$$V = AB \times C,$$

т. е. число кубичныхъ единицъ, содержащихся въ данномъ параллелепипедѣ, равно произведенію отвлеченныхъ чиселъ, происшедшихъ отъ измѣренія площади основанія его и высоты; причемъ за линейную единицу принимается бокъ куба а за квадратную единицу, очевидно, грани того же куба.

Напримѣръ, если A = 5 дюймамъ, B = 2 дюймамъ и C = 3 дюймамъ, то площадь основанія AB равна 5 . 2 или 10 а объемъ V равенъ 10 . 3, или 30 кубичнымъ дюймамъ.

§ 426 *Слѣдствіе 1.* Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что *объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію трехъ реберъ его треграннаго угла, или произведенію трехъ его измѣреній.*

§ 427. *Слѣдствіе 2. Объемъ куба равенъ третьей степени его ребра.*

И дѣйствительно, объемъ куба, какъ прямоугольнаго параллелепипеда въ которомъ ребра трегранпаго угла равны между собою, равенъ произведенію трехъ равныхъ множителей, или третьей степени одного изъ нихъ

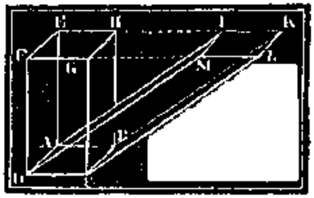
На этомъ основаніи получаютъ отношенія между кубичными мѣрами: напримѣръ кубичная сажень = 7^3 или 343 кубич. футамъ, кубичный футъ = 12^3 или 1728 кубич. дюймовъ и т. п

Предложеніе.

§ 428. *Параллелепипеды имѣющіе равныя основанія и высоты равномѣрны.*

Совмѣстимъ нижнія основанія этихъ параллелепипедовъ при чемъ верхнія основанія будутъ въ одной плоскости, потому что у параллелепипедовъ равныя высоты Для доказательства предложенія будемъ различать два случая, смотря потому, будутъ ли верхнія основанія лежать между параллельными ихъ боками или не будутъ

1-й случай. Параллелепипеды ABCDEFGH и ABCDIKLM имѣютъ общее основаніе ABCD, а другія основанія лежатъ между параллельными линіями EK и FL.

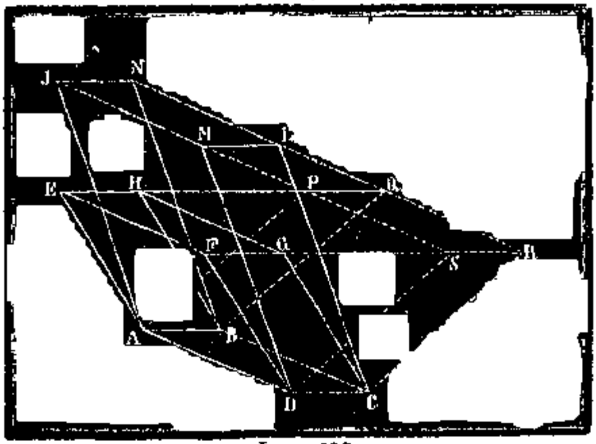


Фиг. 231.

Многогранникъ AEIMDF есть призма потому что плоскости его ADFE, ADMI и EIMF пересѣкаются по параллельнымъ линіямъ AD, IM и FE, которыя ограничены параллельными плоскостями AEI и DFM плоскости же эти параллельны по той причинѣ что онѣ лежатъ въ противуположныхъ граняхъ параллелепипеда. Также докажется, что многогранникъ BHKCGL есть призма. Призмы эти равны между собою

Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ AEI и BHK, составляющихъ основанія призмъ, стороны. AE=BH, AI=BK, какъ противоположны бока въ параллелограммахъ, и углы между ними равны (§ 353); слѣдовательно треугольники эти равны; грань AF=BG, грань AM=BL и такъ грани, составляющія трегранные углы A и B въ этихъ призмахъ равны и одинаково расположены, значитъ и самыя призмы равны. Отнявъ эти равныя отъ многогранника ABCDLKEF, получимъ равныя остатки, т. е. параллелепипедъ ABCDEFGH = ABCDIKLM.

2-й случай. Пусть ABCD общее основаніе двухъ параллелепипедовъ, верхнія ихъ основанія EFGH и INLM лежатъ въ одной плоскости, потому что высоты параллелепипедовъ равны. Продолжимъ бока JM, NL, EH и FG, точки пересѣченія P, Q, R и S соединимъ соотвѣтственно съ A, B, C и D; получимъ параллелепипедъ ABCDPQRS потому что его грани,



Ф 232

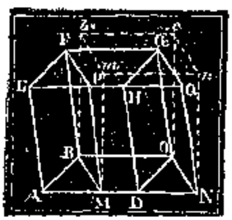
какъ продолженіе граней данныхъ параллелепипедовъ, параллельны между собою. На основаніи предъидущаго случая параллелепипеды ABCDH и ABCDL равномѣрны порознь, параллелепипеду ABCDR слѣдовательно они равномѣрны между собою.

Предложеніе

§ 429. *Объем всякаго параллелепипеда равенъ произведенію его основанія на высоту.*

Пусть ABODEFGH данный параллелепипедъ, надобно доказать что объемъ его равенъ ABOD H гдѣ H означаетъ высоту параллелепипеда, а ABOD его основаніе. Проведемъ BM и ON перпендикулярно къ BO въ плоскости ABOD, потомъ чрезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя BM и BF а также чрезъ ON и OG проведемъ плоскости, получимъ параллелепипедъ BOGFMNQP потому, что въ граняхъ BP и OQ бока угловъ B и O параллельны; остальныя же грани параллельны, какъ продолженія граней даннаго параллелепипеда; оба они равномѣрны, потому что у нихъ общее основаніе BOGF и равныя высоты. Возставивъ перпендикуляры изъ вершинъ прямоугольника BONM къ его плоскости до пересѣченія продолженною гранью FQ, получимъ прямоугольный параллелепипедъ BON*bcnm*; дѣйствительно грани BN и *bn* параллельны, какъ продолженія противулежащихъ граней даннаго параллелепипеда; остальныя грани параллельны на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 352; онъ прямоугольный, ибо грань его BONM прямоугольникъ, котораго плоскость перпендикулярна къ боковымъ ребрамъ, и равномѣренъ съ BONMГGQP, потому что у нихъ общее основаніе BONM и равныя высоты. Значитъ данный параллелепепедъ ABODH равномѣренъ прямоугольному BONM*n*; но этотъ послѣдній равенъ BONM$\times$H, слѣдовательно и данный равенъ BONM$\times$H но прямоугольникъ BONM равномѣренъ параллелограмму ABOD (§ 263), слѣдовательно данный параллелепипедъ равенъ произведенію ABOD H.

Фиг. 235.



Фиг. 238

§ 430. *Слѣдствіе.* Пусть V и v означаютъ объемы двухъ какихъ нибудь параллелепипедовъ, Q и q — ихъ основанія, H и h — высоты Имѣемъ $V=QH$ и $v=qh$, отсюда

$$\frac{V}{v} = \frac{QH}{qh},$$

т. е. *объемы всякихъ параллелепипедовъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

---

20. Объемы треугольной и многогранной призмы. — Отношеніе объемовъ двухъ призмъ, и въ особенности подобныхъ. Объемы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, равномѣрны между собою.

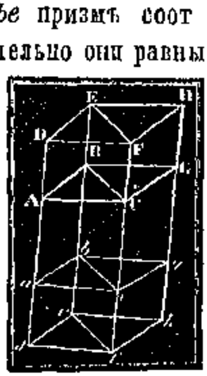
Предложеніе

§ 431. *Объемъ треугольной призмы равенъ произведенію ея основанія на высоту.*

Пусть ABCDEF треугольная призма. Проведя чрезъ ребро BC плоскость BH параллельно грани AF, и чрезъ ребро CF плоскость CH параллельно грани AE, получимъ параллелепипедъ ABGCH; докажемъ, что данная призма составляетъ половину этого параллелепипеда.

Продолживъ ребра параллелепипеда, отложимъ ad=AD и черезъ точки a и d проведемъ плоскости, перпендикулярныя къ ребру Dd, получимъ параллелепипедъ $dehlg$ (§ 394), онъ прямой; ибо его основаніе dh перпендикулярно къ ребру ad.

Такъ какъ AD=ad, то aD=Ad; ребра BE и be призмъ соотвѣтственно равны ребрамъ AD и ad (§ 390), слѣдовательно они равны между собою, и bE=Be; по той же причинѣ cF=fC и Hg=Gh. На основаніи этого, если вмѣстимъ многогранникъ ABGC$dehf$ въ DEHF$abgc$ такъ, чтобы грань $dehf$ совмѣстилась съ гранью $abgc$, вершина въ вершину, то боковыя ребра dA, eB,... лягутъ по соотвѣтствующимъ ребрамъ, потому что они перпендикулярны къ совмѣстившимся гранямъ; а по равенству реберъ dA=aD, bE=Be, .. вершины A, B, G, C совпадутъ въ вершинами D, E, H, F. Поэтому многогранникъ defABC=abcDEF, а отнявъ отъ нихъ общую часть ABCabc найдемъ, что данная призма ABCDEF равна прямой призмѣ $abcdef$. По той же причинѣ призма BCGEFH равномѣрна прямой призмѣ $bcgefh$; но эти прямыя призмы равны, потому что имѣютъ равныя основанія def и efh,



Фиг. 234

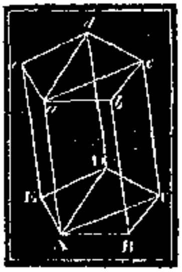
и равныя высоты, напримѣръ ad и cf; слѣдовательно и призма ABCDEF = призмѣ BCGEFH.

Поэтому данная призма составляетъ половину параллелепипеда ABGCH; назвавъ высоту этого параллелепипеда, она же будетъ высотою данной призмы, буквою H, получимъ объемъ $ABGCH = \frac{ABGC}{2} \cdot H$ или $ABC . H$; слѣдовательно объемъ данной призмы $= ABC \times H$, т. е. произведенію ея основанія на высоту

Предложеніе

§ 432. *Объемъ многогранной призмы равенъ произведенію ея основанія на высоту.*

Возьмемъ какую нибудь призму ABCDE $adcde$, объемъ ея назовемъ V, основаніе—Q и высоту—H докажемъ, что $V = Q . H$



Фиг. 235

Разобьемъ данную призму на треугольныя призмы, для этого чрезъ ребра Aa и Dd, Aa и Cc проведемъ плоскости; такимъ образомъ искомый объемъ V равенъ суммѣ объемовъ треугольныхъ призмъ, а какъ объемъ треугольной призмы равенъ ея основанію на высоту, то

$$V = ABC\ H + ACD\ H + ADE\ H$$

или $$V = (ABC + ACD + ADE) . H$$

или $$V = Q\ H$$

§ 433 *Слѣдствіе 1.* Пусть V и v означаютъ объемы какихъ нибудь призмъ Q и q—ихъ основанія H и h—высоты Изъ равенствъ

$$V + QH \quad v = qh$$

имѣемъ

$$\frac{V}{v} = \frac{QH}{qh},$$

т е. *объемы призмъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты*

Если $Q = q$, то $V : v = H : h$, т. е. *объемы призмъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

Если $H = h$, то $V : v - Q . q$, т. е. *объемы призмъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны основаніямъ.*

Наконецъ, если одновременно $Q = q$ и $H = h$, то $V = v$, т. е. *призмы, имѣющія равномѣрныя основанія и равныя высоты, равномѣрны*

Примѣчаніе Въ предложеніи § 432 и его слѣдствіи заключается измѣреніе и зависимость объемовъ, опредѣленныхъ въ предъидущихъ параграфахъ, потому что параллелепипеды и треугольная призма составляютъ частный случай многогранной призмы.

§ 434. *Слѣдствіе. 2.* Положимъ, что призмы подобны и A и a означаютъ ихъ сходственныя ребра. Равенство

$$\frac{V}{v}=\frac{Q}{q}\cdot\frac{H}{h},$$

выражающее отношеніе между какими нибудь призмами, вслѣдствіе подобія ихъ приметъ другой видъ; въ самомъ дѣлѣ, въ подобныхъ призмахъ высоты пропорціональны сходственнымъ ребрамъ (§ 415) а площади основаній—квадратамъ этихъ реберъ, т. е.

$$\frac{H}{h}=\frac{A}{a} \text{ и } \frac{Q}{q}=\frac{A^2}{a^2},$$

поэтому получимъ

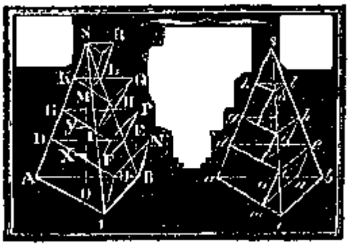
$$\frac{V}{v}=\frac{A^2}{a^2}\cdot\frac{A}{a} \text{ или } \frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3},$$

т. е. *объемы подобныхъ призмъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ*

Предложеніе

§ 435. *Объемы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, равны между собою.*

Пусть въ тетраэдрахъ SABC и $sabc$ основанія ABC и abc равномѣрны и высоты SO и so равны между собою; надобно доказать, что тетраэдры равномѣрны. Положимъ, что тетраэдры неравномѣрны и пусть SABC больше тетраэдра $sabc$. Разность между объемами этихъ тетраэдровъ можно принять за призму, которой основаніе равно треугольнику ABC, а высота—частному отъ раздѣленія ея объема на площадь основанія ABC, положимъ, что Oy равна этой высотѣ. И такъ разность между тетраэдрами выражается произведеніемъ ABC $\times$ Oy. Раздѣлимъ высоты SO и so на одинаковое число равныхъ частей, но такимъ, которыя меньше линіи Oy; при такомъ условіи, покрайней мѣрѣ одна точка дѣленія x придется между точками O и y. Чрезъ точки дѣленія проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ; вслѣдствіе § 420 заключаемъ, что сѣченіе DEF $=def$, GHJ $=ghi$, KLM$=klm$. Чрезъ точки B и C проведемъ прямыя параллельно AS до пересѣченія съ продолженными DE и DF, получимъ призму ABCDN (§ 389) Подобнымъ построеніемъ получимъ призмы DFEP, GHIQ,



Фиг. 236.

defa, *ghid*, *klmg* а для построенія призмы KLMR, проведемъ чрезъ вершину S плоскость параллельную основанію

Мы уже замѣтили, что сѣченія DEF и *def* равномѣрны, поэтому призмы DEFP и *defm*, имѣя равномѣрныя основанія и равныя высоты какъ части дѣленія равныхъ высотъ SO и *so* равномѣрны (§ 433); по той же причинѣ призмы GHJQ и *ghid* KLMR и *klmg* равномѣрны Поэтому разность между суммою призмъ, описанныхъ около тетраэдра SABC и вписанныхъ въ тетраэдрѣ *sabc*, равна призмѣ ABCN а разность между тетраэдрами или $ABC \times Oy$ меньше призмы ABCN, ибо тетраэдръ SABC меньше суммы описанныхъ призмъ, а тетраэдръ *sabc* больше суммы вписанныхъ призмъ. Значитъ $ABC \times Oy < ABC \times Ox$, отсюда $Oy < Ox$, что невѣрно, слѣд. невѣрно сдѣланное нами предположеніе будто бы тетраэдры неравномѣрны

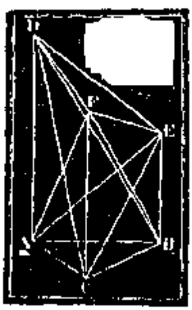
---

21. Разложеніе треугольной усѣченной призмы на три тетраэдра — Объемъ тетраэдра, объемъ пирамиды. — Объемъ усѣченной призмы и пирамиды съ параллельными основаніями. — Отношеніе объемовъ двухъ пирамидъ, и въ особенности подобныхъ

Предложеніе.

§ 436. *Объемъ усѣченной треугольнои призмы равенъ суммѣ объемовъ трехъ тетраэдровъ, имѣющихъ общее основанія съ усѣченною призмою, а вершины ихъ находятся въ вершинахъ сѣченія.*

Пусть ребра AD, CF и BE параллельныя между собою, а плоскость DEF не параллельна ABC, слѣдовательно ABCDEF означаетъ усѣченную треугольную призму, за основаніе которой примемъ треугольникъ ABC. Проведя плоскость чрезъ точки A B и F раздѣлимъ усѣченную призму на тетраэдръ ABCF, котораго основаніе ABC и вершина въ F, и пирамиду FABED. Эта послѣдняя пирамида плоскостью, проходящею чрезъ точки A, F и E, раздѣлится на два тетраэдра FABE и FADE. Первый изъ нихъ съ тетраэдромъ EABC имѣетъ общее основаніе



Фиг. 77

AEB и равныя высоты, потому что вершины пирамидъ находящіяся въ F и C, лежатъ на прямой параллельной основанію ABE (§343)

Тетраэдръ FADE равномѣренъ съ тетраэдромъ DABC, ибо основанія ихъ ADE и ADB равномѣрны (§ 260, Сл. III); а какъ вершины пирамидъ F и C лежатъ на линіи CF параллельной плоскости оснований, то и высоты равны

И такъ усѣченная призма ABCDEF равна суммѣ трехъ тетраэдровъ FABC EABC и DABC, которые удовлетворяютъ условіямъ предложенія.

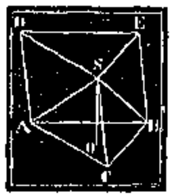
§ 437. *Слѣдствіе* Доказательство предъидущее ни сколько не зависитъ отъ положенія сѣченія DEF относительно основанія ABC; поэтому предложеніе будетъ вѣрно и тогда, если сѣченіе DEF параллельно основанію, т. е. когда многогранникъ будетъ призма, а тогда разстоянія отъ вершинъ D, E и F до основанія тетраэдровъ ABC равны между собою, и тетраэдры будутъ равномѣрны

Отсюда заключаемъ, что *треугольная призма разлагается на три равномѣрные тетраэдра, которыхъ основанія и высоты одинаковы съ основаніемъ и высотою призмы*

Предложеніе

§ 438. *Объемъ тетраэдра равенъ произведенію изъ его основанія на треть высоты*

Пусть SABC тетраэдръ ABC его основаніе и SO высота надо доказать, что объемъ тетраэдра $V = \frac{1}{3} ABC \times SO$



Фиг. 238

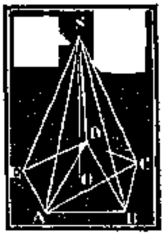
Проведемъ прямыя AD и BE параллельно ребру CS, а чрезъ вершину S — плоскость DSE параллельно основанію ABC, получимъ треугольную призму ABCDES (§ 389). На основаніи предъидущаго параграфа, тетраэдръ SABC составляетъ треть призмы ABCDES, но объемъ призмы равенъ ABC×SO (§ 431) слѣдовательно объемъ тетраэдра

$$V = \frac{1}{3} ABC \times SO$$

Предложеніе

§ 439. *Объемъ пирамиды равенъ произведенію изъ ея основанія на треть высоты.*

Пусть SABCDE данная пирамида, назовемъ ея объемъ буквою V,



Фиг. 239

основаніе — Q и высоту SO чрезъ H. Надо доказать, что $V = \frac{1}{3}QH$ Проведя плоскости чрезъ ребра SA и SD, SA и SC, раздѣлимъ пирамиду на тетраэдры, которыхъ вершины можно принять совпадающими съ вершиною S пирамиды слѣдовательно высоты ихъ одинаковы съ вы сотою H пирамиды

Очевидно, что $V = SADE + SACD + SCBA$ или, на основаніи предъидущаго предложенія,

$$V = \frac{1}{3}ADE\,H + \frac{1}{3}ACD.H + \frac{1}{3}CBA\,H$$

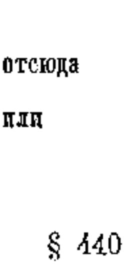
отсюда $$V = \frac{1}{3}(ADE + ACD + CBA)\,H,$$

или $$V = \frac{1}{3}Q\,H$$

Предложеніе

§ 440 *Объемъ усѣченной трегольной призмы равенъ произведенію сѣченія, перпендикулярнаго къ боковому ребру на одну треть суммы боковыхъ реберъ.*

Пусть ребра AD, CF и BE параллельны между собою, слѣдовательно многогранникъ ABCDEF есть усѣченная призма. Проведеніемъ плоскости abc, перпендикулярной къ ребру AD усѣченная призма разобьется на двѣ прямыя усѣченныя призмы abc F и abcC, каждая изъ этихъ призмъ



Фиг. 240.

равна суммѣ трехъ тетраэдровъ, у которыхъ общее основаніе abc, и вершины находятся для одной въ точкахъ D, E, F; а для другой въ A B, C (§ 436)· а какъ ребра перпендикулярны къ основанію abc, то Da cF и проч. будутъ высотами этихъ тетраэдровъ. Поэтому объемъ abcF $= \frac{1}{3}abc\,(a\mathrm{D} + c\mathrm{F} + b\mathrm{E})$ и $abc\mathrm{C} = \frac{1}{3}abc\,(a\mathrm{A} + c\mathrm{C} + b\mathrm{B})$. Сложивъ эти выраженія, выведя abc за скобку и замѣтивъ что $a\mathrm{D} + a\mathrm{A} = \mathrm{AD}$ $c\mathrm{F} + c\mathrm{C} = \mathrm{CF}$ и $\mathrm{B}b + b\mathrm{E} = \mathrm{BE}$, получимъ

$$\text{объемъ } ABCDEF = abc\;\frac{AD + CF + BE}{3}$$

Предложеніе.

§ 441 *Объемъ усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями равенъ суммѣ трехъ пирамидъ, у которыхъ одинаковыя высоты съ усѣченной пирамидой, а основаніями служатъ соот-*

вѣтственныя два основанія усѣченной пирамиды и средняя про порціональная между ними площадь

Пусть A^2 и a^2 означаютъ квадраты, равномѣрные основаніямъ усѣченной пирамиды, H и h высоты тѣхъ пирамидъ, которыхъ раз ность составляетъ усѣченную пирамиду V и v объемы этихъ двухъ пирамидъ, а k высота усѣченной т е. $k=H-h$.

$$V=\frac{1}{3}A^2H\quad v=\frac{1}{3}a^2h,\text{ отсюда } V-v=\frac{1}{3}(A^2H-a^2h).$$

Площади основаній усѣченной пирамиды пропорціональны квадра тамъ разстояній ихъ отъ вершины, слѣдовательно

$$A^2:a^2=H^2:h^2,\text{ отсюда } A:a=H:h$$

изъ послѣдней пропорціи имѣемъ

$$\frac{A-a}{H-h}=\frac{A}{H},\text{ отсюда } H=\frac{Ak}{A-a},$$

также
$$\frac{A-a}{H-h}=\frac{a}{h},\text{ отсюда } h=\frac{ak}{A-a}$$

Поставимъ эти величины въ выраженіе $V-v$, получимъ

$$V-v=\frac{k}{3}\cdot\frac{A^3-a^3}{A-a};$$

отсюда
$$V-v=\frac{k}{3}(A^2+Aa+a^2)$$

или
$$V-v=A^2.\frac{k}{3}+a^2.\frac{k}{3}+Aa.\frac{k}{3}.$$

Этотъ выводъ доказываетъ предложеніе потому что Aa есть средняя пропорціональная величина между A^2 и a^2

§ 442. Выведемъ отношеніе между объемами V и v двухъ пи рамидъ. Пусть Q и q означаютъ ихъ основанія, H и h—высоты.

Извѣстно, что $V={}^1/_3QH$, $v={}^1/_3qh$; раздѣливъ одно равенство на другое, получимъ

$$\frac{V}{v}=\frac{QH}{qh},$$

т е *объемы двухъ пирамидъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

Положимъ $Q=q$; получимъ $V:v=H:h$, т. е. *объемы двухъ пирамидъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

А положивъ $H=h$, получимъ $V:v=Q:q$, т. е. *объемы двухъ пирамидъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны основаніямъ*

Если одновременно $Q=q$ и $H=h$, то $V=v$, т. е. *объемы пирамидъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты равны.*

§ 443. Положимъ, что пирамиды подобны, и пусть A и a означаютъ сходственныя ихъ ребра. Высоты пирамидъ H и h пропорціональны ребрамъ A и a (§ 414), а площади Q и q—квадратамъ этихъ реберъ, т. е

$$\frac{H}{h}=\frac{A}{a} \text{ и } \frac{Q}{q}=\frac{A}{a^2}$$

Вслѣдствіе этихъ равенствъ, отношеніе

$$\frac{V}{v}=\frac{Q}{q}\cdot\frac{H}{h}$$

обратится въ слѣдующее

$$\frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3}.$$

т. е. *объемы подобныхъ пирамидъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ.*

---

22. Показать возможность вычисленія объема какого ни есть многогранника, объемы подобныхъ многогранниковъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ. Понятія о правильныхъ многогранникахъ съ исходящими углами.

§ 444. Мы показали способы для измѣренія объемовъ призмъ и пирамидъ Чтобы найти объемъ какого нибудь многогранника разбиваютъ его на пирамиды проведеніемъ плоскостей изъ вершины многогранника или изъ какой нибудь точки, взятой внутри его, и вычисляютъ объемъ каждой пирамиды: сумма этихъ объемовъ составитъ объемъ даннаго многогранника.

Предложеніе.

§ 445. *Объемы подобныхъ многогранниковъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ.*

Мы видѣли (§ 434 и 443), что объемы подобныхъ призмъ и пирамидъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ ихъ реберъ: это—общее свойство всѣхъ подобныхъ многогранниковъ. Вотъ доказательство:

Пусть V и v означаютъ объемы двухъ подобныхъ многогранниковъ, A и a—сходственныя ребра

Извѣстно (§ 416) что подобные многогранники можно разбить на подобныя и одинаково расположенныя пирамиды. пусть F и t, F' и t', F'' и t'' и т. д. означаютъ эти подобныя пирамиды.

Подобныя пирамиды пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ, а какъ ребра подобныхъ многогранниковъ пропорціональны между собою, то

$$F:t=A^3:a^3,\quad F':t'=A^3:a^3,\quad F'':t''=A^3:a^3 \text{ и т. д.}$$

отсюда

$$\frac{F}{t}=\frac{F'}{t'}=\frac{F''}{t''}=\ldots=\frac{A^3}{a^3},$$

слѣдовательно

$$\frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3}.$$

§ 446. *Правильнымъ многогранникомъ называется такой многогранникъ, въ которомъ всѣ грани составляютъ равные и правильные многогранники, а также всѣ двугранные углы равны между собою.* Напримѣръ, въ кубѣ всѣ грани — равные между собою квадраты и двугранные углы, какъ прямые, также равны между собою; слѣдовательно кубъ—правильный шестигранникъ.

Предложеніе

§ 447. *Правильные многогранники могутъ быть только пяти видовъ.*

1) Вообразимъ, что грани правильнаго многогранника суть правильные треугольники. Каждый уголъ этого треугольника равенъ $^2/_3$, принимая прямой уголъ за единицу. Сумма плоскихъ угловъ около вершины многограннаго угла всегда меньше 4-хъ; поэтому углы правильнаго многогранника, котораго грани правильные треугольники, могутъ быть

трегранные, ибо $^2/_3 . 3<4$,
четырегранные, ибо $^2/_3 . 4<4$,
пятигранные, ибо $^2/_3 . 5<4$.

Нельзя допустить существованіе шестигранныхъ, семигранныхъ и т. д. угловъ, ибо $^2/_3 . 6=4$, а $^2/_3 . 7$, $^2/_3 . 8$ и т. д. больше 4.

И такъ правильные многогранники, которыхъ грани правильные треугольники, могутъ быть не болѣе трехъ видовъ.

Правильный тетраэдръ,—онъ ограниченъ четырьмя правильными треугольниками, и углы трегранные.

Октаэдръ — ограниченъ осьмью правильными треугольниками, и углы его четырегранные.

Икосаэдръ—ограниченъ двадцатью правильными треугольниками и углы его пятигранные.

2) Пусть грани правильнаго многогранника будутъ квадраты, углы такихъ многогранниковъ могутъ быть только трегранные: и дѣйствительно, сумма ихъ плоскихъ угловъ меньше четырехъ прямыхъ, а четырегранные, пятигранные и т. д. углы невозможны, потому что сумма плоскихъ ихъ угловъ при вершинѣ не будетъ меньше 4 прямыхъ. И такъ изъ квадратовъ возможно составить только одинъ видъ правильныхъ многогранниковъ именно *кубъ* или *эксаэдръ*.

3) Положимъ что грани правильнаго многогранника суть правильные пятиугольники. Уголъ этого многоугольника равенъ $\frac{2.3}{5}$ или $^6/_5$ прямаго. Углы такихъ многогранниковъ могутъ быть только трегранные, ибо $^6/_5 \,.\, 3 < 4$ а $^6/_5 \,.\, 4$, $^6/_5 \,.\, 5$ и т. д. больше 4-хъ. И такъ изъ правильныхъ пятиугольниковъ возможно составить только одинъ видъ правильныхъ многогранниковъ, *додекаэдръ*; онъ ограниченъ 12-ю правильными пятиугольниками, углы его трегранные

Другихъ правильныхъ многогранниковъ не можетъ быть Въ самомъ дѣлѣ уголъ правильнаго шестиугольника равенъ $\frac{2.4}{6}$ или $^4/_3$ прямаго а $^4/_3 \,.\, 3 = 4$, слѣдовательно, уголъ трегранный невозможенъ и подавно невозможенъ уголъ четырегранный, пятигранный и т. д.

Изъ правильныхъ 7-ми угольниковъ, 8-ми-угольниковъ и т. д. невозможно составить правильныхъ многогранниковъ потому, что углы ихъ больше угловъ правильнаго шестиугольника. Въ самомъ дѣлѣ, если n означаетъ число угловъ правильнаго многоугольника, то

$$2\left(\frac{n-2}{n}\right) \text{ или } 2 - \frac{4}{n}$$

выражаетъ величину каждаго угла и какъ съ увеличенiемъ числа угловъ n, величина угла $2 - \frac{4}{n}$ увеличивается, а уголъ правильнаго шестиугольника равенъ $^4/_3$, то уголъ всякаго правильнаго многоугольника котораго число боковъ больше шести, будутъ больше $^4/_3$.

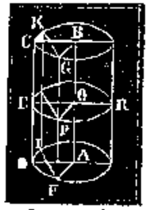
ОТДѢЛЪ ДЕВЯТЫЙ

О круговыхъ тѣлахъ

1 Прямой цилиндръ, прямой конусъ и шаръ — Сѣченіе цилиндра плоскостями, перпендикулярными и параллельными къ оси. — Сѣченіе конуса плоскостью, перпендикулярною къ его оси, и плоскостью проходящею чрезъ ось. Сѣченіе шара. Касательная плоскость.

§ 448. *Прямой цилиндръ есть тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольника около одной изъ его сторонъ, принимаемой за неподвижную.*

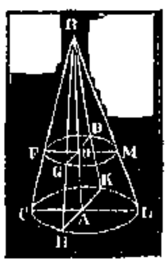
Вообразимъ, что прямоугольникъ ABCD обращается около стороны AB, которая остается неподвижною стороны BC и AD при этомъ движеніи, будучи перпендикулярны къ прямой AB, въ точкахъ B и A должны лежать въ одной плоскости и опишутъ круги. Круги эти называются *основаніями* цилиндра. Прямая CD называется *производящею*, — она описываетъ *цилиндрическую* или *боковую поверхность* цилиндра Неподвижная прямая AB называется *осью* цилиндра. Прямоугольникъ ABCD называется *производящимъ прямоугольникомъ*. *Высота* цилиндра опредѣляется разстояніемъ между его основаніями; слѣдовательно высота прямаго цилиндра равна его оси или производящей.



Фиг 241.

§ 449. *Прямой конусъ есть тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольнаго треугольника около одного изъ его катетовъ принимаемаго за неподвижный.*

Вообразимъ, что прямоугольный треугольникъ ABC обращается около катета AB, который остается неподвижнымъ; другой катетъ AC опишетъ кругъ, котораго центръ въ A,—этотъ кругъ называется *основаніемъ* конуса; ипотенуза BC опишетъ *коническую поверхность* или *боковую* поверхность конуса; точка B называется *вершиною конуса;* разстояніе между основаніемъ и вершиною называется *высотою* конуса,—она совпадаетъ съ неподвижнымъ катетомъ, который называется *осью* конуса. Треугольникъ ABC называется *производящимъ треугольникомъ*.



Фиг. 242

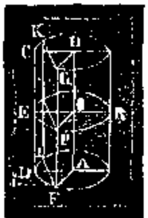
§ 450 *Шаръ* есть тѣло, образуемое обращеніемъ полукруга около его діаметра, принимаемаго за неподвижный. При этомъ движеніи, полуокружность опишетъ *шаровую* или *сферическую* поверхность.

Очевидно, что всѣ точки шаровой поверхности находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра производящей полуокружности; на этомъ основаніи говорятъ: *шаръ* есть тѣло, ограниченное поверхностью, которой всѣ точки равно-удалены отъ одной точки, называемой *центромъ* шара

Всякая прямая, соединяющая центръ шара съ какою нибудь точкою его поверхности, называется *радіусомъ* шара. Прямая, проходящая чрезъ центръ шара и ограниченная его поверхностью, называется *діаметромъ* шара

§ 451 *Сѣченіе цилиндра плоскостью, параллельною оси есть прямоугольникъ.*

Пусть плоскость IFGK параллельна оси AB, и слѣдовательно перпендикулярна къ основанію (§ 373); сѣченія ея съ основаніями будутъ прямыя IF и KG; докажемъ, что сѣченія ея съ цилиндрическою поверхностью также прямыя Вообразимъ, что производящій прямоугольникъ ABCD обращается около оси AB: когда точка D производящей DC придетъ въ F, то производящая DC будучи перпендикулярна къ основанію, должна лежать въ плоскости IFGK; ибо плоскость IFGK и основаніе цилиндра взаимно перпендикулярны (§ 370). И такъ, производящая DC, придя въ F будетъ находиться въ одно время на цилиндрической поверхности и на плоскости IFGK,—значитъ, она принадлежитъ сѣченію этихъ поверхностей; слѣдовательно плоскость IKGF и цилиндрическая поверхность пересѣкаются по прямымъ линіямъ FG и IK. Эти линіи, какъ производящія, перпендикулярны къ основанію, и слѣдовательно параллельны между собою: а какъ IF и K также параллельны между собою (§ 347); значитъ четвеpосторонникъ IFGK —параллелограммъ, онъ прямоугольникъ, потому что FG, будучи перпендикулярна къ плоскости основанія ADF, перпендикулярна икъ прямой FI, проведенной по ней чрезъ основаніе перпендикуляра.



Фиг. 241.

§ 452. *Слѣдствіе. Сѣченіе цилиндра, проходящее чрезъ ось, есть прямоугольникъ*

Предложенie

§ 453. *Сѣченie цилиндра плоскостiю, перпендикулярною к оси, есть кругъ, равный основанiю*

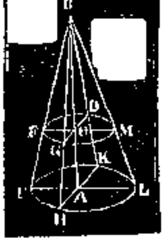
Пусть плоскость EPR перпендикулярна къ оси AB, слѣдовательно параллельна основанiю (§ 345); пусть O означаетъ пересѣченiе этой плоскости съ осью: докажемъ, что сѣченiе есть кругъ, котораго центръ въ O.

Возьмемъ на пересѣченiи плоскости EPR съ цилиндрическою поверхностью какiя нибудь двѣ точки E и P и проведемъ плоскости чрезъ ось A и точку P, также чрезъ AB и точку E: найдемъ, что пересѣченiя OP и AF параллельны (§ 347); PF и AO также параллельны, на основанiи предъидущаго предложенiя, поэтому OP=AF. Точно также докажется, что OE=AD, а такъ какъ AF и AD равны, какъ радiусы основанiя, то OE=OP. Точки E и P взяты произвольно на пересѣченiи; поэтому всѣ точки пересѣченiя плоскости EPR съ цилиндрическою поверхностью находятся въ равныхъ разстоянiяхъ отъ точки O, слѣдовательно это пересѣченiе есть окружность, которой центръ въ O. Кромѣ того, радiусъ OP равенъ радiусу основанiя AF; стало быть окружности и круги, описанные ими также равны

Предложенie

§ 454. *Сѣченie конуса плоскостью перпендикулярною къ оси, есть кругъ.*

Пусть плоскость ΓGD перпендикулярна къ оси, O есть точка пересѣченiя ея съ осью AB; докажемъ, что FGD—кругъ, котораго центръ въ O Соединивъ двѣ произвольныя точки окружности основанiя, C и H, съ вершиною конуса B, найдемъ, что прямыя BC и BH, какъ производящiя, встрѣтятъ линiю сѣченiя въ точкахъ F и G. Проведя плоскости чрезъ AB и BH, AB и BC получимъ параллельныя сѣченiя AH и GO, AC и ΓO Поэтому изъ треугольниковъ ABH и ABC имѣемъ



Фиг. 224.

$$AH.GO=AB.BO,\ AC:FO=AB\cdot BO\cdot$$

отсюда

$$AH.GO=AC:FO$$

Предъидущiе члены этихъ отношенiй, AH, AC, какъ радiусы основанiя, равны между собою; слѣдовательно и послѣдующiе члены равны, т е

$$GO=ΓO$$

И такъ двѣ точки G и Г сѣченія ГGD равно отстоятъ отъ точки O; также объяснимъ, что и всѣ точки сѣченія имѣютъ то же самое свойство слѣдовательно это сѣченіе есть кругъ

Предложеніе

§ 455. *Сѣченіе конуса плоскостію проходящею чрезъ ось есть равнобедренный треугольникъ.*

Пусть сѣченіе ВНК проходитъ чрезъ ось, пересѣченія его съ основаніемъ будетъ прямая НК: надобно доказать, что пересѣченія съ коническою поверхностью будутъ прямыя. Точки В и Н принадлежатъ обѣимъ поверхностямъ, слѣдовательно производящая ВН также принадлежитъ имъ; значитъ пересѣченіе сѣкущей плоскости съ коническою поверхностью будетъ производящая ВН Такимъ же образомъ объяснится, что производящая ВК составляетъ пересѣченіе тѣхъ же поверхностей, значитъ ВНК есть треугольникъ, въ которомъ бока ВН и ВК равны, какъ наклонныя равно-удаленныя отъ основанія перпендикуляра АВ въ плоскости основанія.

Предложеніе

§ 456 *Сѣченіе шара плоскостію есть кругъ.*

Изъ центра шара О опустимъ перпендикуляръ ОА на сѣкущую плоскостью АВС; докажемъ, что сѣченіе АВС есть кругъ, котораго центръ въ А

Фиг. 243.

Произвольныя точки В и С пересѣченія соединимъ съ точкою А и проведемъ радіусы шара ОВ и ОС. Треугольники АВО и АСО прямоугольны, при точкѣ А, потому что перпендикуляръ ОА къ плоскости АВС перпендикуляренъ и ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ по этой плоскости чрезъ его основаніе; въ этихъ треугольникахъ гипотенуза ВО=СО, какъ радіусы шара, катетъ АО общій обоимъ треугольникамъ,—слѣдовательно и остальныя сходственныя части равны, АВ=АС. И такъ, точки В и С равно отстоятъ отъ точки А; а какъ эти точки взяты произвольно на пересѣченіи поверхности съ шаровой сѣкущею плоскостью АВС, то можно сказать, что и всѣ точки линіи сѣченія ВСD равно-отстоятъ отъ точки А, значитъ эта линія есть окружность, а самое сѣченіе—кругъ

§ 457 *Слѣдствіе* Изъ прямоугольнаго треугольника ABO имѣемъ

$$\overline{BO}^2 = AB^2 + AO^2;$$

значитъ, сумма квадратовъ линій AB и AO—постоянная, именно она равна квадрату радіуса шара· отсюда слѣдуетъ что съ увеличеніемъ одной изъ двухъ линій, AB или AO другая уменьшается, и обратно Изъ этого заключаемъ:

1) Кругъ, происшедшій отъ сѣченія шара плоскостью увеличивается по мѣрѣ приближенія его къ центру шара и обратно

2) Сѣченіе, проходящее чрезъ центръ шара, имѣетъ общій центръ и радіусъ съ шаромъ, и оно больше всякаго другаго сѣченія, которое не проходитъ чрезъ центръ шара; потому что для сѣченія, происходящаго чрезъ центръ шара, разстояніе AO равно нулю.

§ 458. Основываясь на предъидущемъ замѣчаніи, подраздѣляютъ круги на *большіе* и *малые*. Кругъ проходящій чрезъ центръ шара, называется *большимъ кругомъ*; а тотъ, который не проходитъ чрезъ центръ шара, называется *малымъ кругомъ*.

Изъ опредѣленія большихъ круговъ слѣдуетъ:

1) *Всѣ большіе круги одного шара равны между собою*

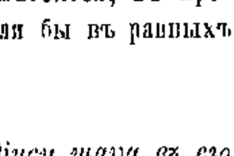
2) *Большіе круги взаимно дѣлятся пополамъ*; потому что ихъ пересѣченіе проходитъ чрезъ центръ шара и, слѣдовательно составляетъ діаметръ, общій обоимъ кругамъ.

3) *Шаръ и его поверхность большимъ кругомъ раздѣляются пополамъ*. Дѣйствительно, перевернувъ одну изъ двухъ частей дѣленія шара и совмѣстивъ большой кругъ этой части съ большимъ кругомъ другой, найдемъ, что поверхности этихъ частей совмѣстятся, въ противномъ случаѣ, точки шаровой поверхности не были бы въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара.

Предложеніе.

§ 459 *Плоскость, перпендикулярная къ радіусу шара въ его концѣ, имѣетъ одну только эту точку общую съ шаровой поверхностью.*

Пусть AO означаетъ радіусъ шара; чрезъ его конецъ A проведемъ плоскость BC перпендикулярно къ AO Произвольную точку D плоскости BC соединимъ съ центромъ O — получимъ наклонную OD къ плоскости; слѣдовательно DO больше перпендикуляра AO; а какъ AO есть радіусъ, то точка D лежитъ внѣ



Фиг 244 *

шара. Сказанное о точкѣ D относится ко всѣмъ точкамъ плоскости ВС, кромѣ точки А значитъ, плоскость эта дѣйствительно имѣетъ одну только общую точку съ шаровою поверхностью.

Плоскость, имѣющая одну только общую точку съ шаровою поверхностью, называется *касательною* плоскостью къ шару. Поэтому, *плоскость, перпендикулярная къ радіусу шара въ его концѣ, касательная къ шару.*

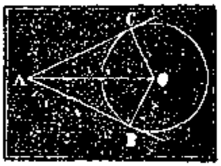
§ 460. *Прямая, имѣющая одну только общую точку съ шаровой поверхностью, называется касательною линіею къ шару.*

Предложеніе

§ 461. *Касательныя линіи къ шару, проведенныя изъ одной точки, равны между собою*

(Длины касательныхъ считаются отъ общей точки до точекъ касанія).

Пусть АВ и АС касательныя къ шару, надобно доказать, что АВ =АС Чрезъ точки А, В и центръ шара О проведемъ плоскость; сѣченіе ея съ шаромъ будетъ большой кругъ, къ которому АВ будетъ касательною, потому что АВ, какъ касательная къ шару, имѣетъ съ кругомъ одну только общую точку В; по той-же причинѣ АС будетъ касательна къ окружности, происшедшей отъ пересѣченія шара плоскостью, проходящею чрезъ точки А С и О. Вслѣдствіе этого, ВО перпендикулярна къ АВ и СО перпендикулярна къ АС. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ АВО и АСО ипотенуза АО—общая, катетъ ВО=СО —слѣдовательно и остальные катеты равны, т е АВ=АС



Фиг. 245

2 Поверхности и объемы цилиндра и конуса. — Отношеніе между поверхностями цилиндровъ и между ихъ объемами. — Отношенія между поверхностями конусовъ и между объемами этихъ тѣлъ. — Поверхность усѣченнаго конуса.

Предложеніе

§ 462. *Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на производящую; объемъ цилиндра равенъ произведенію его основанія на высоту.*

Мы уже знаемъ, что окружность можно принять за периметръ правильнаго многоугольника, котораго бока безконечно-малыя линіи; вслѣдствіе этого допущенія, цилиндръ можно принять за прямую призму, съ безконечнымъ числомъ граней, которой основаніе — правильный многоугольникъ съ безконечно малыми боками, а боковыми ребрами служатъ производящія. Но боковая поверхность прямой призмы равна произведенію периметра основанія на ребро; выраженіе это не зависитъ отъ числа граней призмы, слѣд. боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на производящую

Объемъ призмы равенъ произведенію ея основанія на высоту и это выраженіе не зависитъ отъ числа граней призмы, слѣдовательно и объемъ цилиндра равенъ произведенію его основанія на высоту.

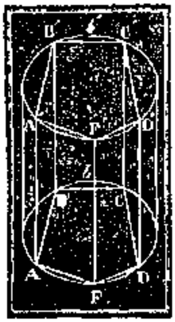
§ 463 Поверхность называется *выпуклою*, будетъ ли она многогранная или кривая, если въ пересѣченіи ея съ прямою линіею нельзя получить больше двухъ точекъ.

Аксіома. *Всякая плоская фигура меньше выпуклой поверхности, имѣющей съ нею общій обводъ.*

Предложеніе. *Всякая выпуклая поверхность меньше объемлющей ее поверхности, если обѣ имѣютъ общій обводъ.*

Назовемъ, для краткости, данную выпуклую поверхность буквою A, а объемлющую ее—буквою B; надобно доказать, что A $<$ B. Очевидно, что въ числѣ множества поверхностей, объемлющихъ поверхность A, и имѣющихъ общій съ ней обводъ, должна быть одна наименьшая, т. е такая, которая меньше всѣхъ прочихъ; поэтому, если докажемъ, что для всякой выпуклой поверхности C, объемлющей поверхность A, при общемъ обводѣ, всегда найдется поверхность меньшая поверхности C, то отсюда заключимъ, что поверхность A—наименьшая и слѣдовательно A $<$ B. Проведемъ плоскость между поверхностями C и A, такъ, чтобы она пересѣкла поверхность A, эта плоскость пересѣчетъ поверхность C по линіи, которая будетъ служить общимъ обводомъ для отсѣченной поверхности отъ C и для плоской фигуры; слѣдовательно, на основаніи предъидущей аксіомы, эта послѣдняя меньше первой. Замѣнивъ эту часть объемлющей поверхности, которая отсѣчена отъ C, плоскою фигурою, получимъ новую объемлющую поверхность, которая меньше C, что и слѣдовало доказать.

Предложеніе. *Полная поверхность цилиндра больше полной поверхности всякой вписанной въ него призмы и меньше полной поверхности описанной призмы около цилиндра.*

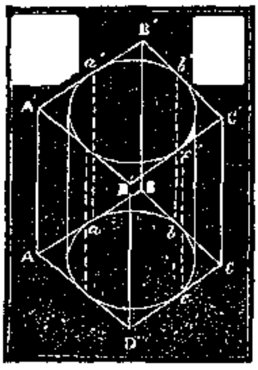


Фиг. 246.

1) Чтобы вписать призму въ цилиндръ, впишемъ многоугольникъ ABCDF въ одномъ изъ основаній цилиндра и изъ вершинъ этого многоугольника возставимъ перпендикуляры къ его плоскости; всѣ они будутъ производящими и пересѣкутъ окружность другаго основанія въ точкахъ A', B', C' ...; проводя прямыя $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ ..., получимъ *вписанную* призму (§ 339) $ABCDFA'B'C'D'F'$.

На основаніи предъидущей аксіомы, каждая изъ боковыхъ граней призмы, напримѣръ $BCC'B'$, меньше соотвѣтствующей части цилиндрической поверхности $BbCC'B'b'$ вмѣстѣ съ двумя сегментами $BbCB$ и $B'b'C'B'$. Поэтому боковая поверхность призмы меньше боковой поверхности цилиндра, сложенной съ суммою сегментовъ обоихъ основаній, отсѣченныхъ отъ круговъ боками многоугольниковъ; а придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства оба основанія призмы, найдемъ, что полная поверхность цилиндра больше полной поверхности призмы.

2) Чтобы описать призму около цилиндра, опишемъ многоугольникъ около одного изъ оснований цилиндра, а изъ точекъ касанія возставимъ перпендикуляры къ нему до пересѣченія съ другимъ основаніемъ, а чрезъ эти точки пересѣченія проведемъ касательныя къ основанію; такъ получится многоугольникъ описанный, котораго бока параллельны соотвѣтственнымъ бокамъ другаго многоугольника; наконецъ, проведеніемъ плоскостей чрезъ каждую пару упомянутыхъ боковъ, получимъ описанную призму.



Фиг. 247.

Такъ какъ всякая выпуклая поверхность меньше объемлющей поверхности, если у нихъ общій обводъ (стр. 245, предложеніе), то, разсматривая части цилиндрической поверхности, заключающіяся между производящими aa' и bb', bb' и cc' и т. д., найдемъ, что выпуклая поверхность $aabb' < aBBa' + Bbb'B' +$ площ. aBb + площ. $a'B'b'$, также выпуклая поверхность $bcc'b' < bCC'b' + cCC'c'$ + площ. bCc + площ. $b'C'c'$

и т. д.

Сложивъ эти неравенства и придавъ къ обѣимъ частямъ два круга основаній, найдемъ, что полная поверхность цилиндра меньше полной поверхности описанной призмы.

Предложеніе. *Полная поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на сумму производящей цилиндра и радіуса основанія.*

Пусть S означаетъ полную поверхность цилиндра, H его высота, она же и производящая, R—радіусъ основанія. Надобно доказать, что

$$S = 2\pi R\,(H + R)$$

Впишемъ въ основаніи и опишемъ около него правильные многогранники одинаковаго числа сторонъ, а по этимъ многоугольникамъ построимъ прямыя призмы, вписанную и описанную; у нихъ будетъ общая высота H съ цилиндромъ.

Пусть P означаетъ периметръ описаннаго многоугольника, а p—вписаннаго при чемъ R будетъ апоѳема перваго, а буквою r назовемъ апоѳему вписаннаго многоугольника. Назвавъ буквами Q и q полныя поверхности описанной и вписанной призмъ, получимъ

$$Q=PH+2.P\frac{R}{2}=P(H+R)$$

$$q=pH+2.p\frac{r}{2}=p(H+r)$$

Разность $P(H+R)-p(H+r)$ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, потому что съ удвоеніемъ числа боковъ основаній призмъ, разности $P-p$ и $(H+R)-(H+r)$ или $R-r$ можно сдѣлать безконечно-малыми *) Мы уже доказали, что полная поверхность цилиндра S заключается между полными поверхностями призмъ, вписанной q и описанной Q около цилиндра; а какъ разность $Q-q$ безконечно-малая, то и разность между Q и S, также S и q можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества

Поэтому положимъ

$$Q=S+\alpha$$

гдѣ α безконечно-малое.

Но $Q=P(H+R)$, притомъ $P=C+\beta$ (§ 304), гдѣ β—безконечно малое а C означаетъ окружность основанія, слѣд.

$$Q=(C+\beta)(H+R)$$

или
$$Q=C(H+R)+\beta(H+R)$$

Итакъ
$$S+\alpha=C(H+R)+\beta(H+R).$$

Въ этомъ равенствѣ S и $C(H+R)$ суть постоянныя, α и $\beta(H+R)$—безконечно малыя (§ 297); слѣд., на основаніи § 298 получимъ

$$S=C(H+R).$$

Слѣдствіе. Чтобы получить боковую поверхность цилиндра, надобно изъ полной поверхности $2\pi R(H+R)$ или $2\pi RH+2\pi R^2$ вычесть два основанія, т. е. $2\pi R^2$, получимъ $2\pi RH$. И такъ *боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на производящую.*

Предложеніе. *Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади его основанія на высоту.*

Пусть V означаетъ объемъ цилиндра H—его высоту R—радіусъ основанія· докажемъ, что $V=\pi R^2H$.

Въ данномъ цилиндрѣ впишемъ и опишемъ около него по призмѣ, которыхъ основанія правильные многоугольники одинаковаго числа боковъ; пусть V_1 и M означаютъ объемъ и основаніе описанной призмы, v и m — объемъ и основаніе вписанной призмы; H будетъ общею высотою для призмъ и цилиндра

Извѣстно (§ 432), что
$$V_1=M.H,$$
$$v=m.H.$$

*) Дѣйствительно, если разности $A-a$ и $B-b$, каждая безконечно-малая, то легко доказать, что разность $AB-ab$ будетъ безконечно-малая. Пусть $B-b=\alpha$, слѣдовательно $B=b+\alpha$, поэтому $AB=Ab+A\alpha$; а отнявъ отъ обѣихъ частей по ab, получимъ $AB-ab=(A-a)b+A\alpha$. По условію $A-a$ безконечно-малое количество, b обыкновенно возрастаетъ, но не до безконечности, слѣдовательно $(A-a)b$ будетъ безконечно-малое; членъ $A\alpha$ также безконечно малый, потому что α или $B-b$, по условію безконечно-малое, а число A обыкновенно уменьшается, слѣдовательно $AB-ab$ будетъ безконечно малое. Этимъ замѣчаніемъ мы будемъ пользоваться и въ послѣдствіи.

Разность MH—mH или H (M—m) можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества: стоитъ только удваивать число сторонъ въ основаніяхъ призмъ. Очевидно, что объемъ цилиндра V больше объема v вписанной призмы и меньше объема V_1 описанной призмы; а какъ разность объемовъ призмъ V_1-v можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго числа, то и разность объемовъ V_1 и V будетъ безконечно малое, поэтому положимъ, что

$$V_1-V=\alpha$$

Но $V_1=M.H$, притомъ $M=s+\beta$, гдѣ s означаетъ площадь круга основанія цилиндра, а β безконечно-малое; слѣд. $V_1=(s+\beta)$ H или

$$V_1=sH+\beta\ H.$$

Итакъ $$V+\alpha=s\ H+\beta\ H$$

отсюда (§ 298) $$V=s.H.$$

§ 464. *Слѣдствіе 1* Пусть S и s означаютъ боковыя поверхности цилиндровъ, R и r—радіусы ихъ основаній, H и h—высоты или производящія

На основаніи предложенія, изложеннаго въ § 462, имѣемъ

$$S=2\pi RH \text{ и } s=2\pi rh$$

отсюда $$\frac{S}{s}=\frac{RH}{rh},$$

поэтому *боковыя поверхности цилиндров пропорціональны производящимъ прямоугольникамъ.*

Если $R=r$, то предъидущая пропорція обратится въ $S:s=H:h$ т. е. *боковыя поверхности цилиндровъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

Положивъ $H=h$, получимъ $S:s=R:r$; т. е. *боковыя поверхности цилиндровъ, имѣющихъ равныя высоты пропорціональны радіусамъ основаній.*

Если положить одновременно $R=r$ и $H=h$, то $S=s$, т. е. *когда въ сравниваемыхъ цилиндрахъ радіусы основаній и высоты равны, то и боковыя поверхности также равны.*

Слѣдствіе 2. Оставляя прежнія значенія буквъ R и r H и h, назовемъ чрезъ V и v объемы цилиндровъ: получимъ

$$V=\pi R^2.H \text{ и } v=\pi r^2.h,$$

отсюда $$\frac{V}{v}=\frac{\pi R^2.H}{\pi r^2.h};$$

т. е. *объемы цилиндровъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

Если $R=r$, то $V:v=H:h$, т. е. *объемы цилиндровъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны высотамъ*

При $H=h$, $V:v=\pi R^2:\pi r^2$ или $V:v=R^2:r^2$, т. е. *объемы цилиндровъ имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны квадратамъ радіусовъ основаній*

Если одновременно $R=r$, $H=h$, то $V=v$, т. е *объемы цилиндровъ, имѣющихъ равныя основанія и высоты, равны между собою*

Предложеніе.

§ 465. *Боковая поверхность конуса равна окружности основанія, умноженной на половину производящей. Объемъ конуса равенъ площади его основанія, умноженной на треть высоты.*

Принявъ окружность основанія за периметръ правильнаго многоугольника съ безконечно-малыми боками, найдемъ, что конусъ есть правильная пирамида о безконечномъ числѣ граней, которой апоѳема равна производящей

Но боковая поверхность правильной пирамиды равна половинѣ произведенія периметра основанія на апоѳему. Выраженіе это не зависитъ отъ числа боковыхъ граней пирамиды, поэтому и боковая поверхность конуса равна половинѣ произведенія окружности основанія на производящую.

Объемъ пирамиды равенъ одной трети произведенія основанія на высоту; значитъ, и объемъ конуса равенъ одной трети произведенія основанія на высоту.

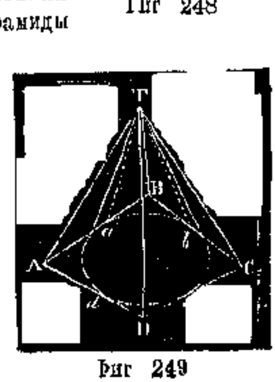
Предложеніе. *Полная поверхность конуса больше полной поверхности вписанной въ него пирамиды и меньше полной поверхности описанной пирамиды.*

1) Чтобы вписать пирамиду въ конусъ, впишемъ многоугольникъ въ его основаніи и чрезъ бока AB, BC,... и вершину конуса T проведемъ плоскости; такъ получимъ вписанную пирамиду TABCD.

Фиг 248

Треугольникъ ABT меньше соотвѣтствующей ему конической поверхности, сложенной съ круговымъ сегментомъ ABA (аксіома стр. 245); тоже скажемъ и о прочихъ треугольникахъ, слѣдовательно боковая поверхность пирамиды меньше боковой поверхности конуса сложенной съ суммою сегментовъ, отрѣзанныхъ отъ круга основанія боками AB, BC,....; а придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства площадь многоугольника ABCD, найдемъ, что полная поверхность вписанной пирамиды меньше полной поверхности конуса.

2) Чтобы описать пирамиду около конуса, опишемъ многоугольникъ около его основанія и проведемъ плоскости чрезъ каждый бокъ этого многоугольника и вершину T.

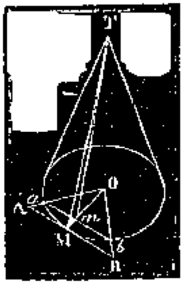


Фиг 249

На основаніи извѣстнаго предложенія (стран 245), часть выпуклой поверхности конуса abT меньше объемлющей ее aBT+bBT+сегмен. abB; тоже скажемъ и о другихъ частяхъ конической поверхности bcT, cdT и daT; слѣдовательно боковая поверхность конуса меньше боковой поверхности пирамиды, увеличенной площадями, которыя заключаются между описаннымъ многоугольникомъ и кругомъ, а придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства по кругу основанія, найдемъ, что полная поверхность конуса меньше полной поверхности описанной пирамиды.

Предложеніе. *Полная поверхность конуса равна половинѣ произведенія окружности основанія на сумму производящей и радіуса основанія.*

Впишемъ въ основаніи и опишемъ около него два правильные многоугольника одинаковаго числа боковъ; пусть P означаетъ периметръ описаннаго многоугольника, и AB одинъ изъ его боковъ, — p означаетъ периметръ вписаннаго многоугольника и ab одинъ изъ его боковъ, OM и Om будутъ апоѳемы этихъ многоугольниковъ. Примемъ эти многоугольники за основанія правильныхъ пирамидъ, которыхъ вершины находятся въ вершинѣ T даннаго конуса; апоѳемами пирамидъ будутъ TM и Tm. Положимъ, для краткости, что S означаетъ полную поверхность конуса, Q и q означаютъ соотвѣтственно полныя поверхности описанной и вписанной пирамидъ. Получимъ (§§ 401, 267).



Фиг 250.

$$Q=\tfrac{1}{2}\,P\,MT+\tfrac{1}{2}P\,MO=\tfrac{1}{2}\,P\,(MT+MO),$$
$$q=\tfrac{1}{2}\,p.\,mT+\tfrac{1}{2}\,p.mO=\tfrac{1}{2}\,p\,(mT+mO).$$

Полная поверхность S, какъ доказано въ предъидущемъ предложеніи, заключается между Q и q, докажемъ, что разность между послѣдними двумя произведеніями можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества. Въ самомъ дѣлѣ, всегда можно вписать и описать такіе многоугольники, что разность между ихъ периметрами P p будетъ безконечно малая; другіе же множители даютъ въ разности MT − mT + MO — mO или MT — mT+Mm, гдѣ первые два члена MT—mT составляютъ разность двухъ сторонъ въ треугольникѣ MmT, которая меньше третьей стороны Mm. И такъ

$$MT-mT+MO-mO<2Mm$$

и извѣстно, что всегда можно найти такіе два правильные многоугольника, одинъ вписанный, а другой описанный около круга, что разность между ихъ апоѳемами, Mm, будетъ безконечно малое (§ 303). Значитъ, на основаніи выноски стр. 247, разность между ½ P (MT+MO) и ½ p (mT+mO) можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

Поверхность S заключается между Q и q которыхъ разность есть безконечно малое, поэтому можно положить

$$Q=S+\alpha,\ P=C+\beta,$$

гдѣ α и β безконечно малыя, а C означаетъ окружность основанія слѣд

$$Q=\tfrac{1}{2}(C+\beta)\ (MT+MO)$$

или $$Q=\tfrac{1}{2}C\ (MT+MO)+\tfrac{1}{2}\beta\ \ (MT+MO).$$

Итакъ $$S+\alpha=\tfrac{1}{2}C\ (MT+MO)+\tfrac{1}{2}\ \beta\ (MT+MO),$$

отсюда $$S=\tfrac{1}{2}C\ (MT+MO)$$

или $$S=\tfrac{1}{2}2\pi MO\times MT+\pi\overline{MO}^2$$

Слѣдствіе. Если изъ полной поверхности конуса, которая равна $\tfrac{1}{2}2\pi.\ MO\,MT+\pi.\overline{MO}^2$, вычтемъ площадь основанія $\pi\ \overline{MO}^2$, то получимъ боковую поверхность конуса $\tfrac{1}{2}\,2\pi.MO.MT$. И такъ, *боковая поверхность конуса равна половинѣ произведенія окружности основанія на производящую.*

Предложеніе. *Объемъ конуса равенъ одной трети произведенія площади основанія на высоту.*

Пусть V означаетъ объемъ конуса H—его высоту R—радіусъ основанія докажемъ, что $V=\frac{1}{3}\pi R^2 . H$.

Въ данномъ конусѣ впишемъ и около него опишемъ по правильной пирамидѣ, одинаковаго числа граней. Пусть V′ и M означаютъ соответственно объемъ и основаніе описанной пирамиды v и m—объемъ и основаніе вписанной пирамиды; H будетъ общая высота для пирамидъ и конуса. Извѣстно (§439), что

$$V'=\frac{1}{3}\ MH,$$

$$v=\frac{1}{3}\ mH.$$

Разность $\frac{1}{3}$ M.H—$\frac{1}{3}m$ H или $\frac{1}{3}$ H (M—m) можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества: стоитъ только удвоивать число боковъ въ основаніяхъ пирамидъ (§ 303).

Объемъ V заключается между V′ и v, слѣд. можно положить

$$V'=V+\alpha,\ M=\pi R^2+\beta,$$

гдѣ α и β безконечно малыя. Поэтому, вмѣсто равенства $V=\frac{1}{3}$ M H получимъ

$$V+\alpha=\frac{1}{3}\ (\pi R^2+\beta)\ H$$

или

$$V+\alpha=\frac{1}{3}\pi R^2\ H+\frac{1}{3}\beta H$$

отсюда на основаніи (§§ 297 и 298),

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\times H.$$

Слѣдствіе 1. Положимъ, что S и s означаютъ боковыя поверхности конусовъ, K и k—ихъ производящія, а R и r—радіусы основаній Вслѣдствіе объясненнаго предложенія (§ 465) получимъ

$$S=\pi RK\quad s=\pi rk$$

отсюда $S:s=RK:rk$;

если $R=r$, то $S:s=K:k$

если $K=k$, то $S:s=R:r$;

при $R=r$ и $K=k$, имѣемъ $S=s$

Слѣдствіе 2. Пусть V и v означаютъ объемы конусовъ R и радіусы основаній, H и h высоты,—получимъ

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2.H,\ v=\frac{1}{3}\pi r^2.h;$$

отсюда $\dfrac{V}{v}=\dfrac{\pi\ R^2.H}{\pi\ r^2.h}$;

т. е *объемы конусовъ пропорціональны произведеніямъ площадей основаній на высоты.*

Если $R=r$, то $V:v=H:h$;

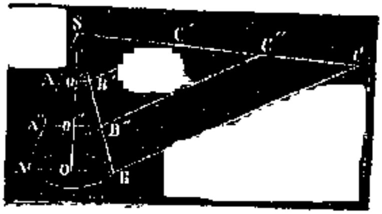
если $H=h$, то $V:v=R^2:r^2$;

при $R=r$ и $H=h$, имѣемъ $V=v$

Предложеніе

§ 466 *Боковая поверхность конуса, усѣченнаго параллельно основанію, равна произведенію полусуммы окружностей основаній на производящую*

Разсѣчемъ конусъ плоскостью ABS, проходящею чрезъ ось а въ плоскости этого сѣченія изъ точки B возставимъ перпендикуляръ BC,



Фиг. 251

причемъ пусть длина BC равна окружности основанія; точку C соединимъ съ вершиною S, а чрезъ точку B′ проведемъ хорду B′C′ параллельную боку BC треугольника BCS; прямая B′C′ равна окружности описанной радіусомъ B′O′. Въ самомъ дѣлѣ, окружности BO и B O пропорціональны радіусамъ BO и B′O′, а эти послѣдніе пропорціональны прямымъ SB и SB′; слѣдовательно

$$\text{окр } BO \ \text{ окр. } BO' = SB : SB,$$

но

$$BC : B'C' = SB . SB',$$

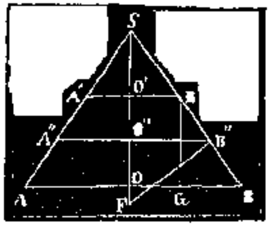
три члена этихъ пропорцій порознь равны, ибо *окр*. BO = BC поэтому и четвертые члены равны, т. е. *окр*. $BO' = B'C'$

Выраженія, измѣряющія боковую поверхность конуса SABO и площадь треугольника SBC, одинаковы (§§ 465, 258), слѣдовательно боковая поверхность конуса SABO равна площади треугольника BCS; по той же причинѣ боковая поверхность конуса SA′B′O′ равна площади треугольника SB′C′ Отсюда заключаемъ, что боковая поверхность усѣченнаго конуса ABB′A′ равна площади трапеціи BC′CB, слѣдовательно она измѣряется выраженіемъ $^1/_2(BC + B'C')$ BB′ или $^1/_2$(*окр* BO + *окр* B′O′) BB′

§ 467 *Слѣдствіе 1* Если чрезъ середину производящей BB проведемъ плоскость, параллельно основаніямъ усѣченнаго конуса, и прямую B C″ параллельную основаніямъ трапеціи; то, какъ и прежде, докажемъ, что *окр*. $B'O'' = B'C'$. Извѣстно, что трапеція измѣряется также произведеніемъ $B''C'' . BB'$; слѣдовательно боковая поверхность усѣченнаго конуса равна *окр*. $B''O''.BB'$. И такъ *боковая поверхность усѣченнаго конуса равна произведенію окружности сѣченія, равно-отстоящаго отъ основаній, на производящую*.

§ 468. *Слѣдствіе 2*. Въ плоскости ABS, чрезъ середину B производящей BB′, проведемъ перпендикуляръ B′F къ BB′ до пересѣченія въ F съ осью конуса, SO, и докажемъ, что поверхность усѣченнаго конуса ABB′A′ равна произведенію высоты OO′ усѣченнаго конуса на окружность, описанную радіусомъ FB″

Треугольники $BB'G$ и $B''O'F$ подобны, ибо стороны угловъ $BB'G$ и $O B''F$ взаимно перпендикулярны а углы BGB' и $B O F'$ — прямые, слѣдовательно $BB' : B''F = B'G : B''O'$, отсюда $BB' \times B''O' = B''F \times B'G$. Но боковая поверхность усѣченнаго конуса равна $2\pi . B''O' . BB'$, слѣдовательно, замѣнивъ произведеніе послѣднихъ двухъ множителей ему равнымъ, получимъ $2\pi B''F . B'G$ или $2\pi . B''F . OO'$.



Фиг. 66

И такъ, *боковая поверхность усѣченнаго конуса равна произведенію изъ его высоты на окружность, которой радіусъ равенъ длинѣ перпендикуляра, возставленнаго къ сѣкущей плоскости проходящей чрезъ ось, изъ середины производящей до пересѣченія съ осью*

Предложеніе

§ 469. *Объемъ конуса, усѣченнаго параллельно основанію, равенъ суммѣ трехъ конусовъ, у которыхъ высота общая съ высотою усѣченнаго конуса, а основаніями ихъ служатъ оба основанія усѣченнаго конуса и площадь средняя пропорціональная между ними*

Пусть V и v означаютъ объемы полнаго конуса и отсѣченнаго, такъ что $V-v$ будетъ выражать искомый объемъ усѣченнаго конуса; буквами R и r назовемъ соотвѣтственно радіусы основаній этихъ конусовъ чрезъ H и h означимъ ихъ высоты. Получимъ

$$V-v=\pi R^2\frac{H}{3}-\pi r^2\frac{h}{3}$$

или

$$V-v=\frac{\pi}{3}(R^2H-r^2h)$$

Легко понять, что $R : r = H : h$

Изъ послѣдней пропорціи получимъ

$$R-r:R=H-h : H \text{ отсюда } H=\frac{R(H-h)}{R-r},$$

$$R-r : r=H-h : h; \text{ отсюда } h=\frac{r(H-h)}{R-r}.$$

Поэтому

$$V-v=\frac{\pi}{3}\left[\frac{R^3(H-h)}{R-r}-\frac{r^3(H-h)}{R-r}\right]$$

$$=\frac{\pi(H-h)}{3}\cdot\frac{R^3-r^3}{R-r}$$

$$=\frac{\pi(H-h)}{3}\cdot(R^2+r^2+Rr)$$

Этимъ и доказывается предложеніе, потому что $H-h$ выражаетъ высоту усѣченнаго конуса, πR^2 и πr^2—площади основаній усѣченнаго конуса, а Rr есть средняя пропорціональная между R^2 и r^2, слѣдовательно πRr есть средняя пропорціональная между πR^2 и πr^2

3-й Поверхности шароваго сегмента, шароваго пояса и всего шара. Объемъ шароваго сектора, шара и сегментовъ

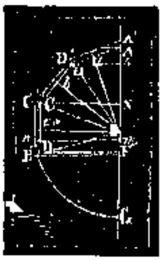
§ 470. Если разсѣчь шаръ плоскостью, то его поверхность раздѣлится на двѣ части; каждая изъ этихъ частей называется сегментною поверхностью. По этому *сегментною поверхностью называется часть шаровой поверхности, отсѣченная плоскостью*. Кругъ, отсѣкающій отъ шара сегментную поверхность, называется *основаніемъ* сегментной поверхности

Высотою сегментной поверхности называется часть перпендикуляра, возставленнаго къ основанію изъ его центра до пересѣченія съ сегментною поверхностью

Предложеніе

§ 471. *Сегментная поверхность равна произведенію окружности большаго круга на высоту*

Сегментную поверхность можно получить обращеніемъ дуги круга AB около діаметра AG, проходящаго чрезъ конецъ A этой дуги, при этомъ другой конецъ B дуги опишетъ окружность основанія; надобно доказать, что сегментная поверхность $S=2\pi.AO.AF$



Фиг. 203

Впишемъ въ дугѣ AB правильную ломаную ADCB и проведемъ перпендикуляры Dk, CN на ось AG. Отъ вращенія ломаной ADCB около оси AG, получимъ поверхность вписанную, которая будетъ состоять изъ коничеcкой поверхности, произведенной ипотенузою AD прямоугольнаго треугольника ADk; кромѣ того, изъ поверхностей усѣченныхъ конусовъ, которыхъ производящія будутъ DC и CB.

На основаніи § 465, поверхность $AD=2\pi Dk.\frac{AD}{2}=2\pi Dl\,.\,Aa$ прямоугольные треугольники ADk и AOa имѣютъ общій уголъ A слѣдовательно сходственные бока ихъ пропорціональны $Dk\ aO = Ak\ Aa$, отсюда $Dk.Aa = aO\ Ak$

По этому $\qquad$ пов $AD = 2\pi\ aO\ Ak$

А на основаніи § 468,

$$\text{пов. } DC = 2\pi.aO.kN \text{ (ибо } bO = aO)$$
$$\text{пов. } CB = 2\pi.aO.NF \text{ (ибо } cO = aO).$$

Сумма первыхъ частей этихъ трехъ равенствъ составляетъ вписанную поверхность, происшедшую отъ обращенія ломаной ADCB; для краткости назовемъ ее—пов. ADCB, слѣдовательно

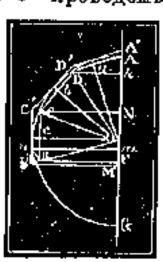
$$\text{пов. } ADCB = 2\pi . aO\ (Ak + kN + NF)$$

или $\qquad$ пов. $ADCB = 2\pi . aO . AF$.

Отсюда заключаемъ «что поверхность, происшедшая отъ вращенія «правильной ломаной около діаметра круга, описаннаго около этой ломаной, равна произведенію окружности въ ней вписанной $(2\pi . aO)$ на «высоту (AF)»

Выраженіе это не зависитъ отъ числа боковъ ломаной вписанной въ дугѣ AB, слѣдовательно оно справедливо и въ томъ случаѣ, когда ихъ число безконечно, а съ тѣмъ вмѣстѣ бока будутъ безконечно малые. Но дугу AB можно принять за ломаную, состоящую изъ безконечно-малыхъ боковъ, причемъ перпендикуляръ aO обратится въ радіусъ AO; поэтому сегментная поверхность $= 2\pi . AO . AF$, гдѣ $2\pi . AO$ есть окружность большаго круга, а AF — высота сегментной поверхности

По данной вписанной ломаной ADCB опишемъ около дуги AB правильную же ломаную одинаковаго числа боковъ съ первою: изъ центра O проведемъ радіусы, перпендикулярные къ частямъ ломаной ADCB, чрезъ концы этихъ радіусовъ проведемъ касательныя къ окружности до пересѣченія ихъ съ продолженными радіусами OA, OD, OC, OB; такъ получится ломаная A'D'C'B', которая, при обращеніи фигуры около оси AG, произведетъ *описанную* поверхность около сегментной поверхности,—мы уже знаемъ, что вписанная пов. $ADCB = 2\pi . aO . AF$.



Фиг. 253;

На томъ же основаніи, описанная пов. $A'D'C'B' = 2\pi\ AO\ A'M$ Сегментная поверхность S больше вписанной пов ADCB, потому что обѣ имѣютъ общимъ обводомъ окружность, описанную радіусомъ BF. По той же причинѣ поверхность S меньше пов. $A'D'C'B'$+пов. BB' слѣдовательно S заключается между $2\pi.aO\ AF$ и $2\pi\ AO.A'M$+пов. B'B.

Легко убѣдиться, что разность между $2\pi\ AO\ A'M$+пов BB' и $2\pi\ aO\ AF$ или $2\pi\ (AO.\ A'M - aO.\ AF)$+пов. BB' можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, если одновременно удваивать число боковъ ломаныхъ, вписанной и описанной. Въ самомъ дѣлѣ, $AO - aO$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, какъ разность апоѳемъ (§ 303); тоже скажемъ и о разности A'M —

$AF = AA' + MF < 2AA'$; наконецъ пов. $BB' = \pi\,(BF + B'M).\,BB'$ (§ 466) тоже безконечно малая, ибо $BB' = AA'$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

Пусть S означаетъ сегментную поверхность, происходящую отъ обращенія дуги AB около діаметра AG. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что

$$\text{пов. } A'D'C'B' = S + \alpha,$$

гдѣ α безконечно малое.

Но поверхность $A'D'C'B' = 2\pi\,.\,AO\,.\,A'M$, гдѣ $A'M = AF + A'A + MF$; мы уже замѣтили, что $AA' + MF < 2AA'$, слѣд. $AA' + MF$ есть безконечно малое, назовемъ его буквою β; получимъ $A'M = AF + \beta$ и

$$\text{пов. } A'D'C'B' = 2\pi\,.\,AO\,.\,(AF + \beta)$$
$$= 2\pi\,.\,AO\,.\,AF + 2\pi\,.\,AO\,.\,\beta$$

поэтому
$$S + \alpha = 2\pi\,.\,AO\,.\,AF + 2\pi\,.\,AO\,.\,\beta$$

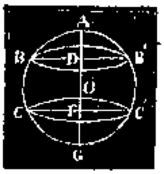
отсюда (§ 298)
$$S = 2\pi\,.\,AO\,.\,AF.$$

Примѣчаніе. Сравнивая выраженія сегментной поверхности $2\pi\,.\,AO\,.\,AF$ и описанной поверхности $2\pi\,.\,AO\,.\,A'M$, по причинѣ неравенства $A'M > AF$ заключаемъ, что *сегментная поверхность меньше описанной около нея поверхности*

Предложеніе

§ 472. *Поверхность шара равна произведенію окружности большаго круга на діаметръ шара* (фиг. 254)

Пусть AG означаетъ діаметръ окружности; на полуокружности возьмемъ какую нибудь точку, C, опустимъ перпендикуляръ CF на діаметръ



Фиг 254

и вообразимъ, что полуокружность образуется на діаметрѣ AG, какъ на оси, при чемъ полуокружность произведетъ шаровую поверхность, дуги AC и CG сегментныя поверхности для первой, высота будетъ AF, а для второй — FG. На основаніи предъидущаго предложенія, означивъ буквою R радіусъ шара AO получимъ

$$\text{Поверх. } AC = 2\pi R\,.\,AF,$$
$$\text{Поверх. } CG = 2\pi R\,.\,FG\cdot$$

отсюда

$$\text{Поверх. } AC + \text{поверх. } CG = 2\pi R\,(AF + FG)$$

или
$$\text{Поверх. шара} = 2\pi R\,.\,AG$$

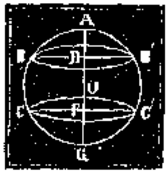
Слѣдствіе. Поставивъ въ предъидущее выраженіе, вмѣсто AG, ему равное $2R$, найдемъ, что поверхность шара равна $2\pi R\,.\,2\pi R$ или $4\pi R^2$, гдѣ πR^2 есть площадь большаго круга. Поэтому *поверхность шара равна учетверенной площади большаго круга*

§ 473. *Поясомъ* называется часть шаровой поверхности, заключающаяся между двумя параллельными плоскостями Разстояніе между этими плоскостями называется *высотою* пояса

Предложенiе

§ 474. *Поверхность пояса равна произведенiю окружности большаго круга на высоту пояса.*

Пусть BB′ и CC′ означают параллельные круги, между которыми заключается поясъ BCB′C′; изъ центра шара O проведемъ перпендикуляръ AG къ этимъ кругамъ; DF выразитъ высоту пояса; надобно доказать что пов. пояса BCC′B′$=2\pi$.AO.DF



Фиг. 254.

Очевидно, что поясъ равенъ разности сегментныхъ поверхностей ACC′ и ABB′; слѣдовательно

$$\text{пов. пояса } BCC'B' = 2\pi \,.\, AO \,.\, AF - 2\pi \,.\, AO \,.\, AD$$
$$= 2\pi \,.\, AO\,(AF - AD)$$
$$= 2\pi \,.\, AO \,.\, DF.$$

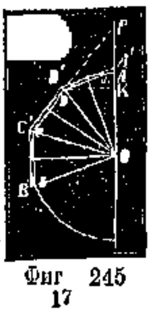
§ 475. *Шаровымъ секторомъ* называется тѣло, происходящее отъ обращенiя круговаго сектора около одного изъ своихъ радiусовъ. При этомъ дуга сектора произведетъ сегментную поверхность.

Предложенiе

§ 476. *Объемъ шароваго сектора равенъ соотвѣтствующей ему сегментной поверхности, умноженной на треть радiуса шара.*

Возьмемъ шаровой секторъ, происходящiй отъ обращенiя круговаго сектора ABO около радiуса AO. Надобно доказать, что объемъ этого сектора равенъ одной трети произведенiя сегментной поверхности, происшедшей отъ обращенiя дуги AB, на радiусъ шара AO.

Въ дугѣ AB впишемъ правильную ломаную линiю ADCB и проведемъ радiусы BO, CO, DO. Опредѣлимъ объемъ тѣла, происшедшаго отъ обращенiя многоугольника ADCBO около радiуса AO — тѣло это называется *описаннымъ* въ шаровомъ секторѣ. Оно состоитъ изъ объемовъ тѣлъ, происшедшихъ отъ обращенiя треугольниковъ ADO, DCO и CBO около оси AO; найдемъ каждый объемъ. Проведя DK перпендикулярно къ AO, разобьемъ треугольникъ ADO на два прямоугольные треугольника ADK и KDO; каждый изъ нихъ, при обращенiи около оси AO произведетъ конусъ. У этихъ кону-



Фиг. 245

совъ будетъ общее основаніе — кругъ πDK^2, а высотами ихъ будутъ для одного AK а для другаго OK; слѣдовательно

$$\text{объемъ } ADO = \frac{1}{3}\pi DK^2 \,.\, AO.$$

Произведеніе DK . AO выражаетъ удвоенную площадь треугольника ADO; проведя перпендикуляръ Oa на бокъ AD, найдемъ, что произведеніе Oa . AD также выражаетъ удвоенную площадь треугольника ADO; поэтому DK AO$=a$O . AD и

$$\text{объемъ } ADO = \frac{1}{3}\pi .\, DK .\, aO\ AD$$

$$= \frac{1}{3} 2\pi .\, DK .\, \frac{AD}{2} . aO,$$

но поверхность конуса, происшедшаго отъ обращенія треугольника ADK около его бока AK равна 2π DK $\frac{AD}{2}$ что для краткости означимъ пов. AD,

поэтому $$\text{объемъ } ADO = \frac{1}{3} \text{ пов. } AD\ aO \ldots\ldots (1)$$

Теперь переходимъ къ опредѣленію объема, происшедшаго отъ вращенія треугольника D около оси AO. Продолживъ бокъ DC до пересѣченія съ продолженною осью AO въ точкѣ P, найдемъ, что объемъ DCO—*объем.* PCO—*объем.* DPO. Два послѣдніе объема опредѣлятся точно также, какъ и объемъ найденный по (1) равенству, слѣдовательно $$\text{объемъ } DCO = \frac{1}{3}\textit{пов. } PC.\ aO - \frac{1}{3}\textit{пов. } PD\ aO$$

$$= \frac{1}{3}(\textit{пов. } PC\ \ \textit{пов.} PD).aO$$

$$\text{объемъ } DCO\ \ \frac{1}{3}\textit{пов } DC\ aO \quad (2)$$

Точно также найдемъ

$$\text{объемъ } CBO = \frac{1}{3}\textit{пов.} CB.aO \ldots\ldots (3)$$

Сложивъ (1), (2) и (3) равенства, найдемъ, что первая часть выразитъ объемъ, происшедшій отъ вращенія многоугольника ADCBO около оси AO; а во вторую часть войдетъ сумма поверхностей, происшедшихъ отъ вращенія прямыхъ AD, DC, CB или *пов* ADCB и такъ

$$\text{объемъ } ADCBO = \frac{1}{3}\textit{пов. } ADCB.\ aO.$$

Выраженіе это не зависитъ отъ числа боковъ ломаной вписанной въ дугѣ AB; слѣдовательно оно справедливо и въ томъ случаѣ, когда ихъ число безконечно а съ тѣмъ вмѣстѣ бока будутъ безконечно малы. Но дугу AB можно принять за ломаную, состоящую изъ безконечно малыхъ боковъ, при чемъ перпендикуляръ aO обратится въ радіусъ AO. По этому объемъ, произведенный вращеніемъ круговаго сектора ABO около оси AO, равенъ одной трети поверхности, произведенной дугою AB, помноженной на радіусъ AO

Опишемъ правильную ломаную A′D′C′B′ около дуги AB которой бокъ параллельны бокамъ вписанной правильной ломаной ADCB.

Очевидно, что объемъ шароваго сектора, который назовемъ V, больше вписаннаго объема и меньше описаннаго; намъ уже извѣстно, что объемъ ADCBO=$^1/_3$*пов*.ADCB.*a*O; на томъ же основаніи объемъ A′D′C′B′O′=$^1/_3$*пов*.A′D′C′B′. AO. Поэтому V заключается между $^1/_3$*пов*.ADCB.*a*O и $^1/_3$*пов*. A′D′C′B′. AO.

Разность $^1/_3$*пов*. A′D′C′B′. AO—$^1/_3$*пов*. ADCB. *a*O можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, если удваивать число боковъ ломаныхъ (§§ 303,471 прим.).

Поэтому, назвавъ буквою S сегментную поверхность произведенную вращеніемъ дуги AB около оси AO, найдемъ

$$\text{пов } A'D'C'B' = S+\beta \text{ (§ 471 прим.)}$$

и $$\text{объемъ } A'D'C'B'O' = V+\alpha$$

но $$\text{объемъ } A'D'C'B'O' = {}^1/_3 \text{пов. } A'D'C'B' \times AO$$

слѣд. $$\text{объемъ } A'D'C'B'O' = {}^1/_3(S+\beta)\times AO$$
$$= {}^1/_3 S\times AO + {}^1/_3 AO\times\beta.$$

И такъ $$V+\alpha = {}^1/_3 S\times AO + {}^1/_3 AO\times\beta,$$

отсюда (§ 298) $$V = S\times\frac{AO}{3}$$

Предложеніе

§ 477. *Объемъ шара равенъ шаровой поверхности умноженной на треть радіуса.*

Пусть V означаетъ искомый объемъ шара, S—его поверхность, R—радіусъ; надобно доказать, что $V={}^1/_3$ S. R

Возьмемъ круговой секторъ, котораго дуга равна четверти окружности а радіусъ равенъ R; отъ обращенія этого сектора около одного изъ его радіусовъ, получимъ половину шара, и такъ, на основаніи предъидущаго предложенія, объемъ шароваго сектора равенъ одной трети соотвѣтствующей ему сегментной поверхности на радіусъ, то

$$\frac{V}{2} = {}^1/_3\cdot\frac{S}{2}\ R, \text{ отсюда } V = {}^1/_3 S\ \ R$$

Слѣдствіе. Взявъ вмѣсто шаровой поверхности S учетверенную площадь большаго круга $4\pi R^2$, получимъ $V={}^4/_3\pi R^3$

И такъ, по данному радіусу опредѣлится объемъ шара; обратно по данному объему V можно опредѣлить радіусъ —стоитъ только рѣшить послѣднее уравненіе относительно R.

Чтобы выразить объемъ шара въ его діаметрѣ D, поставимъ въ послѣднюю формулу, вмѣсто R ему равное $\frac{D}{2}$, по сокращеніи получимъ

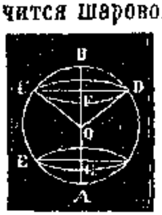
$$V=\frac{\pi D^3}{6}$$

§ 478. *Шаровымъ сегмента называется часть объема шара отсѣкаемая плоскостью.* Высотою его называется высота соотвѣтствующей сегментной поверхности

Предложеніе

§ 479. *Объемъ шароваго сегмента равномѣренъ съ цилиндромъ, котораго радіусъ основаній равенъ высотѣ сегмента, высота же равна радіусу шара безъ одной трети высоты сегмента.*

Если круговой секторъ BCO обращать около діаметра AB, то получится шаровой секторъ, который состоитъ изъ конуса, происшедшаго отъ



Фиг 256

обращенія прямоугольнаго треугольника COF около катета OF и шароваго сегмента BCFD. Объемъ этого послѣдняго назовемъ X, высоту его BF означимъ чрезъ h, буквами V и v назовемъ объемы шароваго сектора и конуса, буквою R, какъ всегда, радіусъ шара Очевидно: $X=V-v$ а какъ поверхность шароваго сегмента равна $2\pi R\,h$ то

$$X=2\pi R.h.\frac{R}{3}-\pi\overline{CF}^2.\frac{FO}{3}.$$

Перпендикуляръ CF къ діаметру AB есть средняя пропорціональная между отрѣзками BF и AF, слѣдовательно $CF^2=BF.AF$, или $CF^2=h(2R-h)$; прямая $FO=BO-BF$ или $FO=R-h$ поэтому

$$X=\frac{2\pi R^2h}{3}-\frac{\pi h(2R-h)(R-h)}{3};$$

производя умноженіе $(2R-h)\times(R-h)$ получимъ $2R^2-3Rh+h^2$ слѣдовательно

$$X=\frac{\pi h}{3}(2R^2-2R^2+3Rh-h^2)=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$$

§ 480. *Шаровымъ сегментомъ о двухъ основаніяхъ называется часть объема шара, заключающаяся между двумя параллельными плоскостями*· разстояніе между этими плоскостями называется *высотою*

Предложеніе

§ 480. *Объемъ сегмента о двухъ основаніяхъ равенъ произведенію полусуммы его основаній на высоту, сложенному съ объемомъ шара, котораго діаметръ равенъ этой самой высотѣ* (фиг. 256).

Возьмемъ сегментъ, происшедшій отъ обращенія дуги CE около діа метра AB, перпендикуляры CF и EG назовемъ буквами a и q, высо ту FG чрезъ h, а объемъ этого сегментаы чрезъ V; положимъ еше, что высота сегмента BEG равна H, а сегмента BCF равна H. Очевидно, что искомый объемъ равенъ разности поименованныхъ сейчасъ сегментовъ

Но шар сегментъ $BEG = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$,

$$\text{шар сегментъ } BCF = \pi H'^2 \left(R - \frac{H'}{3}\right);$$

слѣдовательно искомый сегментъ о двухъ основаніяхъ выразится

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right) - \pi H'^2 \left(R - \frac{H'}{3}\right)$$

или

$$V = \pi R\ (H^2 - H'^2) - {}^1/_3 \pi (H^3 - H'^3)$$

Но $H - H' = h$, слѣдовательно

$$H^2 - H'^2 = h\,(H + H'),\ H^3 - H'^3 = h\,(H^2 + HH' + H'^2),$$

поэтому $V = \pi h \left\{\ R\,(H + H') - {}^1/_3\,(H^2 + HH' + H'^2)\ \right\}$

На основаніи свойствъ перпендикуляра къ діаметру, имѣемъ

$$a^2 = H'\ (2R - H'),\ \ b^2 = H\ (2R - H);$$

отъ сложенія этихъ равенствъ получимъ

$$a^2 + b^2 = 2R(H + H') - (H^2 + H'^2)$$

отсюда

$$R(H + H') = \frac{a^2 + b^2 + H^2 + H'^2}{2}$$

Вставивъ эту величину въ выраженіе для V, получимъ

$$V = \pi h\ \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{(H - H')^2}{6}\right),$$

или

$$V = h\,\frac{\pi a^2 + \pi b^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.$$

---

4 Подобіе цилиндровъ и конусовъ. — Отношеніе поверхностей и объемовъ шаровъ, описанныхъ разными радіусами — Отношеніе между поверхностями и объемами шара и около него описаннаго цилиндра. — Поверхность и объемъ конуса изъ данной вершины описаннаго около шара.

§ 482. *Цилиндры называются подобными, когда ихъ оси пропорціональны радіусамъ основаній.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что производящіе прямоугольники подобныхъ цилиндровъ также подоб ны между собою (§ 224)

Предложенie

§ 483. *Боковыя поверхности подобныхъ цилиндровъ пропорцiональны квадратамъ сходственныхъ линiй.*

Пусть S, R и H означаютъ боковую поверхность цилиндра, радiусъ основанiя и ось, а s r и h — тѣ же величины въ другомъ цилиндрѣ, который подобенъ первому

Имѣемъ $S=2\pi RH \quad s=2\pi rh$

отсюда $\frac{S}{s}=\frac{R}{r}\cdot\frac{H}{h};$

вслѣдствie подобiя цилиндровъ,

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}$$

слѣд $\frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{H^2}{h^2},$

Предложенie

§ 484 *Объемы подобныхъ цилиндровъ пропорцiональны кубамъ сходственныхъ линiй.*

Пусть V и v означаютъ объемы двухъ подобныхъ цилиндровъ, R и r—радiусы основанiй; H и h —оси или высоты. Имѣемъ

$$V=\pi R^2H \quad v=\pi r^2h$$

отсюда $\frac{V}{v}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{H}{h}.$

вслѣдствie подобiя цилиндровъ,

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}.$$

слѣдовательно $\frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3}=\frac{H^3}{h^3}.$

§ 485. *Конусы называются подобными когда ихъ оси пропорцiональны радiусамъ основанiй.* Изъ этого опредѣленiя слѣдуетъ, что производящie треугольники въ подобныхъ конусахъ также подобны (§ 217), и слѣдовательно производящiя линiи пропорцiональны осямъ и радiусамъ основанiй

Предложенie.

§ 486. *Боковыя поверхности подобныхъ конусовъ пропорцiональны квадратамъ сходственныхъ линiй.*

Пусть S и s означаютъ поверхности подобныхъ конусовъ, R и r

радіусы основаній H и h — оси K и k — производящія Получимъ

$$S = 2\pi R \frac{K}{2} \quad s = 2\pi r \frac{k}{2}$$

отсюда
$$\frac{S}{s} = \frac{R}{r} \times \frac{K}{k};$$

вслѣдствіе подобія конусовъ

$$\frac{R}{r} = \frac{K}{k} = \frac{H}{h}$$

поэтому
$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{K^2}{k^2} = \frac{H^2}{h^2}.$$

Предложеніе

§ 487. *Объемы подобныхъ конусовъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ линій*

Пусть V и v означаютъ объемы подобныхъ конусовъ а остальныя означенія тѣ же, что и въ предъидущемъ предложеніи Имѣемъ

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{H}{3}, \quad v = \pi r^2 \frac{h}{3},$$

отсюда
$$\frac{V}{v} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{H}{h},$$

а вслѣдствіе подобія конусовъ,

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{K}{k},$$

поэтому
$$\frac{V}{v} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{K^3}{k^3}.$$

Предложеніе.

§ 488 *Поверхности шаровъ пропорціональны квадратамъ радіусовъ, а объемы—ихъ кубамъ.*

Пусть S и s означаютъ поверхности шаровъ V и v—объемы R и r—ихъ радіусы. Извѣстно (§ 472), что

$$S = 4\pi R^2, \quad s = 4\pi r^2$$

отсюда
$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}$$

Извѣстно также что

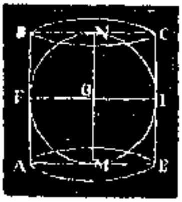
$$V = {}^4/_3\pi R^3 \quad v = {}^4/_3\pi r^3;$$

отсюда
$$\frac{V}{v} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Предложеніе

§ 489. *Поверхности, а равно и объемы шара и описаннаго около него цилиндра пропорціональны числамъ 2 и 3*

Проведемъ два взаимно перпендикулярные діаметра IГ и MN а черезъ концы ихъ — касательныя; тогда получимъ квадратъ ABCD,



Фиг 257

описанный около круга. Отъ вращенія фигуры около діаметра, полукругъ MFN произведетъ шаръ, а прямоугольникъ MNDA – цилиндръ описанный; при чемъ плоскости его основаній будутъ касательными къ шару, потому что онѣ перпендикулярны къ радіусамъ ON и OM въ ихъ концахъ.

Пусть V S и R означаютъ послѣдовательно объемъ шара, его поверхность и радіусъ; V' и S'—объемъ описаннаго цилиндра и его полную поверхность; надобно доказать, что $V : V' = S : S' = 2 : 3$.

Боковая поверхность цилиндра равна $2\pi AM \cdot MN$ или $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$,—значитъ, *боковая поверхность описаннаго цилиндра равна поверхности шара;* придавъ два основанія, т. е. $\pi AM^2 \cdot 2$ или $2\pi R^2$ получимъ поверхность S' описаннаго цилиндра. И такъ $S = 4\pi R^2 + 2\pi R^2$ или $6\pi R^2$ а поверхность шара $S = 4\pi R^2$; отсюда

$$\frac{S}{S'} = \frac{4}{6} \text{ или } \frac{S}{S'} = \frac{2}{3}$$

Объемъ цилиндра равенъ $\pi AM^2 \cdot MN$ или $2\pi R^3$; слѣдовательно

$$V' = 2\pi R^3 \quad V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \text{ (§ 477)},$$

отсюда

$$\frac{V}{V'} = \frac{4}{6} \text{ или } \frac{V}{V'} = \frac{2}{3}$$

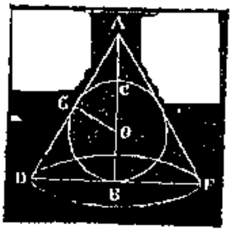
И такъ

$$\frac{S}{S'} = \frac{V}{V'} = \tfrac{2}{3}.$$

Примѣчаніе. Цилиндръ, котораго высота равна діаметру основанія, называется *равнобочнымъ*

Вопросъ

§ 490 *Опредѣлить поверхность и объемъ конуса изъ данной вершины описаннаго около шара*



Фиг. 258.

Пусть A данная вершина; чрезъ эту точку и центръ круга проведемъ прямую AB; такъ какъ точка A дана, то разстояніе AC извѣстно. Назовемъ его буквою a, и радіусъ буквою ρ.

Чрезъ точки A и B проведемъ касательныя AD, AF и FD къ окружности. Отъ вращенія фигуры около прямой AB полукругъ CGB произведетъ шаръ, а прямоугольный треугольникъ ABD — конусъ котораго плоскость основанія будетъ касательною къ шару (§ 459)

Надобно опредѣлить поверхность и объемъ этого конуса; съ этою цѣлью найдемъ производящую AD и радіусъ основанія BD; высота же AB конуса извѣстна, именно $2r+a$.

Проведя радіусъ OG въ точку касанія G получимъ подобные треугольники ABD и AGO, потому что уголъ BAD имъ общій а углы ABD и AGO —прямые, поэтому

$$AD:AO=AB:AG \text{ и } BD:GO=AB:AG$$

Изъ прямоугольнаго треугольника AGO, имѣемъ $AG=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{GO}^2}$; но $AO=r+a$, слѣдовательно $AG=\sqrt{(r+a)^2-r^2}$; или

$$AG=\sqrt{2ar+a^2}=\sqrt{a(2r+a)}$$

Замѣтивъ что въ выведенныхъ пропорціяхъ $AB=2r+a$ получимъ

$$AD=\frac{(r+a)(2r+a)}{\sqrt{a(2r+a)}};\ BD=\frac{r(2r+a)}{\sqrt{a(2r+a)}}.$$

Такъ какъ $2r+a$ есть квадратъ радикала $\sqrt{2r+a}$, то

$$AD=(r+a)\sqrt{\frac{2r+a}{a}} \text{ и } BD=r\sqrt{\frac{2r+a}{a}}.$$

Пусть S и V означаютъ боковую поверхность и объемъ конуса тогда получимъ $S=2\pi BD\ \frac{AD}{2}$, $V=\pi\ \overline{BD}^2.\frac{AB}{3}$

Вставимъ сюда, вмѣсто AD, BD и AB, равныя имъ, по сокращеніи получимъ

$$S=\frac{\pi r(r+a)(2r+a)}{a}$$

$$V=\frac{\pi r^2(2r+a)^2}{3a}.$$

§ 491. *Слѣдствіе.* Если положить AC или a равнымъ радіусу r то $AD=2r\sqrt{3}$, и $DF=2BD=2r\sqrt{3}$, слѣдовательно $AD=DF$. А какъ наклонныя AF и AD равны между собою, то треугольникъ ADF правильный, а описанный конусъ называется *равнобочнымъ* Формулы выведенныя для боковой поверхности S и объема V конуса, значительно упростятся для равнобочнаго конуса; и дѣйствительно, положивъ въ нихъ $a=r$, получимъ $S=6\pi r^2$, $V=3\pi r^3$.

Чтобы найти полную поверхность M конуса, надобно къ боковой поверхности S придать площадь основанія $\pi\,\overline{BD}^2$, или $3\pi r^2$: получимъ $M=9\pi r^2$ А какъ поверхность шара, которую означимъ чрезъ F, равна $4\pi r^2$, то

$$\frac{F}{M}=\frac{4}{9}$$

Назвавъ объемъ шара буквою W получимъ

$$W=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad V=3\pi r^3.$$

отсюда $$\frac{W}{V}={}^4/_9$$

И *такъ поверхности, а равно и объемы шара и равнобочнаго описаннаго конуса, пропорціональны числамъ 4 и 9*

§ 492 *Примѣчаніе.* Опишемъ около шара равнобочные цилиндръ (§§ 489 490 и 491) и конусъ. Назовемъ полныя поверхности шара, цилиндра и конуса соотвѣтственно буквами S S' и S'' то на основаніи § 489, получимъ $$\frac{S}{2}=\frac{S'}{3} \text{ или } \frac{S}{4}=\frac{S}{6}$$

а на основании § 491, получимъ $$\frac{S}{4}=\frac{S'}{9}$$

Изъ этихъ равенствъ имѣемъ
$$\frac{S}{4}=\frac{S'}{6}=\frac{S''}{9}.$$

Назвавъ буквами V, V и V'' соотвѣтственно объемы шара, цилиндра и конуса найдемъ, что
$$\frac{V}{4}=\frac{V'}{6}=\frac{V}{9}$$

И такъ, если около шара описаны равнобочные цилиндръ и конусъ, то ихъ полныя поверхности, а равно объемы, пропорціональны числамъ 4, 6 и 9

Численныя задачи на отдѣлы VIII и IX

1) Вычислить поверхность правильной шестисторонней пирамиды зная, что бокъ основанія равенъ 3 дюймамъ, а боковое ребро равно 10 дюймамъ

2) Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда равна 35 кв дюймамъ; изъ трехъ реберъ, составляющихъ трегранный уголъ, одно равно 2 дюймамъ, а другое вдвое больше третьяго. Найти площадь каждой грани

3) Полная поверхность прямоугольнаго параллелепипеда равна 142 кв. дюймамъ, а высота его равна 7 дюймамъ; вычислить площадь основанія, зная, что одинъ бокъ его вдвое больше другаго.

4) Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ 376 кубичнымъ дюймамъ; его три смежныя ребра пропорціональны числамъ 2, 3, 4 Вычислить поверхность этого параллелепипеда.

5) Найти ребро куба, равномѣрнаго суммѣ трехъ кубовъ которыхъ ребра послѣдовательно равны 1, 2 и 3-мъ дюймамъ

6) Въ кругѣ, котораго діаметръ равенъ 12-ти дюймамъ, вписанъ равносторонній треугольникъ. Найти объемъ пирамиды, которой основаніе равно этому треугольнику, а высота равна 1 футу.

7) Высота пирамиды равна 1 арш. +2 дюйма, а основаніе ея квадратъ котораго бокъ равенъ 2 футамъ; вычислить объемъ этой пирамиды.

8) Основанія усѣченной пирамиды суть правильные шестисторонники, бокъ одного изъ нихъ равенъ 1 дюйму, а другаго 1 вершку. Вычислить высоту усѣченной пирамиды (т. е. разстояніе между основаніями), зная, что объемъ этой усѣченной пирамиды равенъ 15 кубичнымъ дюймамъ

(Если Q и q означаютъ основанія усѣченной пирамиды а x—разстояніе между ними, то усѣченный объемъ

$$\tfrac{1}{3}x(Q+q+\sqrt{Q\,q})=15,$$

$$\frac{Q}{q}=\left(\frac{1\text{ верш.}}{1\text{ дюйм.}}\right)^2$$

Помощію этого послѣдняго уравненія исключите Q изъ перваго и вычислите площадь q; тогда изъ перваго уравненія найдете x).

9) Внутренняя поверхность вазы состоитъ изъ граней, которыя имѣютъ такое расположеніе, что шаръ, діаметромъ въ одинъ дюйм., можетъ касаться въ одно время ко всѣмъ гранямъ и къ горизонтальной плоскости, проходящей чрезъ верхніе края этой вазы; вся поверхность вазы, считая въ томъ числѣ дно и верхъ равна 70 кв дюймамъ. Найти объемъ этой вазы.

10) Дана пирамида, которой вершина находится въ точкѣ S, а основаніе есть многоугольникъ ABCD..., пирамида эта разсѣчена плоскостью $abcd$... параллельно основанію, причемъ пирамида S $abcd$.. составляетъ двѣнадцатую часть всей пирамиды. Узнать какую часть ребро Sa составляетъ отъ ребра SA съ точностью до 0, 1.

11) Извѣстны объемъ цилиндра и его боковая поверхность, найти основаніе и высоту цилиндра.

12) Высота цилиндра равна 9 дюймамъ вычислить радіусъ основанія съ точностью до $^1/_{10}$, зная что полная поверхность этого цилиндра равна 1 квадр. аршину.

13) Отъ обращенія прямоугольника около его основанія получился

цилиндръ, котораго объемъ равенъ 5 ти куб. дюймамъ, а обращая тотъ же прямоугольникъ около другаго бока, принимаемаго за высоту, получился объемъ въ 2 куб. вершка. Найти. 1) отношеніе основанія къ высотѣ прямоугольника; 2) вычислить діагональ этого прямоугольника съ точностью до $^1/_{1}$.

14) Объемъ прямаго конуса равенъ 1 куб. сажени, радіусъ основанія—2 аршина· найти коническую поверхность (боковую) съ точностью до $^1/_{100}$.

15) Цилиндръ и усѣченный конусъ имѣютъ общее основаніе и одну высоту. Опредѣлить при какомъ отношеніи радіусовъ основаній усѣченнаго конуса объемъ этого послѣдняго составитъ половину объема цилиндра.

Пусть буквы R и r означаютъ радіусы, h—высоту усѣченнаго конуса и въ тоже время высота цилиндра. Опредѣлить объемы усѣченнаго цилиндра и конуса.

$$^1/_3\pi h(R^2+r^2+Rr)={}^1/_3\pi h.r^2\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^2+\frac{R}{r}+1\right),$$

$$\pi R^2h=\pi h.r^2.\left(\frac{R}{r}\right)^2,$$

$$^2/_3\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2+\frac{R}{r}+1\right]=\left(\frac{R}{r}\right)^2,$$

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2-2\frac{R}{r}-2=0 \text{ и т д}$$

Примѣчаніе. Разобрать тотъ случай когда усѣченный конусъ долженъ составить треть цилиндра

16) Доказать, что половина высоты усѣченнаго конуса есть средняя пропорціальная между радіусами обоихъ основаній въ томъ случаѣ если производящая усѣченнаго конуса равна суммѣ этихъ радіусовъ.

17) Доказать, что объемъ усѣченнаго конуса равенъ его полной поверхности, умноженной на шестую часть его высоты, если производящая этого усѣченнаго конуса равна суммѣ радіусовъ основанія

$$V=\frac{H}{3}\pi(R^2+r^2+R^2)-\frac{H}{6}\pi[(R+r)^2+R^2+r^2]$$

$$S=\pi[(R+r)K+R^2+r^2]=\pi[(R+r)^2+R^2+r^2],$$

$$V=S\times\frac{H}{6}$$

18) По извѣстнымъ радіусамъ 10 футъ и 6 футъ основаній усѣченнаго конуса, найти радіусъ основанія цилиндра, равномѣрнаго этому усѣченному конусу, когда у обоихъ тѣлъ одна высота

19) Объемъ усѣченнаго конуса равенъ 5 7 куб. футовъ, высота его—2,4 фута, діаметръ нижняго основанія 1,5 фута; вычислить до $^1/_{100}$ діаметръ верхняго основанія.

20) Прямой конусъ, котораго высота равна 9 футамъ, а радіусъ основанія 5 футамъ, разсѣченъ плоскостью параллельно основанію на разстояніи 1 фута отъ вершины. Вычислить объемъ и боковую поверхность усѣченнаго конуса съ точностью до $^1/_{100}$.

21) Производящая конуса равна 10 футамъ, площадь основанія=4 кв. фут. Вычислить площадь круговаго сѣченія, отстоящаго на 1,4 фута отъ основанія.

22) Объемъ конуса равенъ 300 куб. дюйм., высота его равна 5 дюймамъ. На какомъ разстояніи отъ вершины должно провести плоскость, перпендикулярную къ оси, чтобъ отсѣченный конусъ содержалъ 45 кубичныхъ дюймовъ.

23) Большой кругъ шара принятъ за основаніе цилиндра; найти отношеніе высоты этого цилиндра къ радіусу шара съ тѣмъ, чтобы боковая поверхность цилиндра составлена $^7/_8$ частей половины шаровой поверхности

24) Вычислить земной радіусъ въ метрахъ, съ точностью до 1-го метра.

25) Высота шароваго сегмента объ одномъ основаніи равна 0,42 дюйма, радіусъ этого основанія = 1,2 дюйма Вычислить сегментную поверхность.

26) Вычислить высоту шароваго сегмента, поверхность котораго равномѣрна большому кругу шара.

27) Радіусъ шара=2 дюймамъ, сегментная высота = 1 2 дюйма Найти радіусъ круга, равномѣрнаго сегментной поверхности.

28) Радіусъ шара равенъ 10 дюймамъ, вычислить поверхность шароваго пояса, а также и основанія его, которыя проведены по одну сторону центра шара въ разстояніяхъ отъ него 4 и 5 ти дюймовъ.

29) Извѣстенъ радіусъ шара, желаютъ построить конусъ, равномѣрный этому шару, притомъ такой, чтобы высота его составляла половину радіуса шара. Найти радіусъ основанія

30) Извѣстна сегментная поверхность 4 кв дюйма и высота ея 0,7 дюйма. Вычислить объемъ шара

31) Мѣры вѣса въ зависимости отъ единицъ длины у насъ опредѣлены, по Высочайшему указу 1835 года 11 октября, тѣмъ условіемъ что кубическій дюймъ воды вѣситъ 368,361 долю; а *ведро* опредѣлено

вѣсомъ воды въ 30 фунтовъ, *четверикъ*—вѣсомъ воды въ 64 фунта (*) Опредѣлить объемы ведра и четверика.

32) Если четверикъ имѣетъ форму равнобочнаго цилиндра (высота= діаметру основанія), то какъ велика высота этого цилиндра.

$$\frac{x^2}{4}\pi = \frac{96^2 \cdot 64}{368,361}$$

33) Если гарнецъ имѣетъ форму цилиндра котораго высота равна $^1/_4$ аршина, то какъ великъ діаметръ основанія

34) Опредѣлить ребро куба, котораго объемъ равенъ гарнцу

35) Ведро имѣетъ форму цилиндра, котораго высота равна $10^1/_4$ дюйма; вычислить діаметръ основанія съ точностью до $^1/_{10}$ дюйма

36) Вычислить съ точностью до $^1/_{10}$ дюйма ребро чугуннаго куба, вѣсомъ въ одинъ фунтъ, когда извѣстно, что удѣльный вѣсъ чугуна равенъ 7-ми (т е. при равныхъ объемахъ чугуна и воды, вѣсъ перваго въ 7 разъ больше вѣса воды).

37) Вычислить, вѣрно до $^1/_{10}$, діаметръ чугуннаго шара вѣсомъ въ 1 фунтъ, когда удѣльный вѣсъ чугуна равенъ 7-ми.

38) Опредѣлить количество ведеръ воды вмѣщающейся въ чанѣ, котораго высота=2 арш., діаметръ нижняго основанія=$1^1/_4$ арш., діаметръ верхняго основанія=$1^1/_2$ аршина

39) Сколько бочекъ воды вмѣщается въ колодцѣ, котораго основаніе равно 4 квадр. аршинамъ, а глубина воды—одна сажень.

40) Въ примѣръ дѣлимости тѣлъ приводятъ, что червонецъ можно вытянуть въ листъ, котораго площадь равна 2000 квадр дюймовъ. Вычислить толстоту листа, полагая, что червонецъ вѣситъ 1 золотникъ 12 долей а удѣльный вѣсъ золота равенъ 19-ти.

41) Вычислить діаметръ платиновой проволоки, длиною въ 300 саженъ, а вѣсомъ въ одинъ золотникъ Извѣстно, что удѣльный вѣсъ платины равенъ 22.

42) Высота александровской колонны въ С.-Петербургѣ (цилиндрической формы) равна 84 футамъ, діаметръ ея 14 футовъ удѣльный вѣсъ гранита равенъ 2,716 Вычислить вѣсъ этой колонны (**)

(*) Числа эти надобно имѣть въ виду при рѣшеніи послѣдующихъ задачъ.

(**) Всѣ численныя задачи можно рѣшать по логариѳмамъ или помощію обыкновенныхъ правилъ Ариѳметики; въ послѣднемъ случаѣ необходимо прибѣгать къ вычисленію по приближенію и въ тѣхъ задачахъ, въ которыхъ не задана точность окончательнаго вывода достаточно вычислить *три* или четыре цифры

43) Литръ по объему равенъ кубическому дециметру, форма его прямой цилиндръ, котораго высота вдвое больше діаметра основанія Найти высоту и діаметръ основанія вѣрно до 0,01

44) Опредѣлить поверхность жаркаго пояса, зная, что тропики имѣютъ географическую широту 23°27′30″ а градусъ экватора равенъ 104,3388 . . . . версты

45) Конусъ изъ дубу погруженъ въ спиртъ вершиною внизъ. Найти какая часть высоты конуса находится въ жидкости: если удѣльный вѣсъ дуба равенъ 0,68, а спирта 0,970.

46) Зная величину ребра правильнаго тетраэдра, найти его объемъ

47) Найти размѣры равнобочнаго конуса, равномѣрнаго равнобочному цилиндру и опредѣлить котораго изъ нихъ полная поверхность больше.

48) Сравнить поверхности шара и ему равномѣрнаго равнобочнаго цилиндра.

49) Сравнить объемы двухъ конусовъ, происходящихъ отъ вращенія прямоугольнаго треугольника послѣдовательно около каждаго изъ катетовъ

высшихъ разрядовъ. Для первыхъ четырехъ дѣйствій можно руководствоваться моей Ариѳметикою, 1869 г., а для возвышеній въ степень, извлеченій квадратнаго и кубичнаго корней, а также опредѣленія степени погрѣшности по логариѳмамъ моей брошюрой подъ заглавіемъ „Вычисленіе по приближенію“.

ПОНЯТІЯ

О КОНИЧЕСКИХЪ СѢЧЕНІЯХЪ

Сѣченіе прямаго конуса, съ круговымъ основаніемъ, какою ни есть плоскостью.—Коническія сѣченія: эллипсъ, парабола, гипербола; фокусы, оси, вершины, центръ.

§ 1. Кромѣ извѣстныхъ намъ двухъ сѣченій конуса, одного — по оси, а другаго—перпендикулярнаго къ ней, можно получить слѣдующія сѣченія:

1) Сѣкущая плоскость можетъ встрѣтить всѣ производящія даннаго конуса; происшедшая кривая называется *эллипсомъ*.

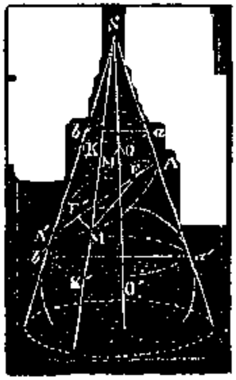
2) Сѣкущая плоскость можетъ встрѣтить всѣ производящія, за исключеніемъ одной, къ которой она будетъ параллельна; происшедшая кривая называется *параболою*.

3) Сѣкущая плоскость можетъ пересѣчь всѣ производящія даннаго конуса, за исключеніемъ двухъ, къ плоскости которыхъ она будетъ параллельна. Въ этомъ случаѣ сѣкущая плоскость пересѣчетъ не только поверхность даннаго конуса, но поверхность другаго конуса, происшедшаго отъ продолженія производящихъ даннаго за его вершину. Происшедшая кривая будетъ состоять изъ двухъ частей, *вѣтвей*, чего не можетъ случиться при сѣченіяхъ, производящихъ эллипсъ и параболу; въ противномъ случаѣ прямая линія (производящая) пересѣкала бы плоскость въ двухъ точкахъ. Такая кривая линія, состоящая изъ двухъ вѣтвей, называется *гиперболою*.

Три эти кривыя, эллипсъ, парабола и гипербола, называются *коническими сѣченіями*; разсмотримъ свойства каждой изъ нихъ.

1 Эллипсъ

2. Пусть $AMA'M'$ означаетъ эллипсъ, происшедшій отъ пересѣченія сѣкущей плоскости съ коническою поверхностью Къ этой сѣкущей плоскости, чрезъ ось SO конуса, проведемъ перпендикулярную плоскость и положимъ, что она встрѣчаетъ коническую поверхность по направленію производящихъ SA и SA', а сѣкущую плоскость $AMA'M$ —по линіи $A'A$. Въ треугольникѣ ASA впишемъ кругъ и положимъ, что F, a, b означаютъ точки его касанія; проведемъ еще кругъ, касательный къ боку AA' и къ продолженіямъ другихъ боковъ треугольника ASA; пусть F', a', b' означаютъ точки касанія. Вообразимъ, что фигура вращается около оси SO. при этомъ упомянутые два круга опишутъ шары, къ которымъ сѣкущая плоскость $AMM'A$ будетъ касательною въ точкахъ F и F. И дѣйствительно, плоскость круга abF или ASA' и $AMM'A'$ взаимно перпендикулярны; а въ одной изъ нихъ abF проведенъ перпендикуляръ OF къ пересѣченію ихъ AA' (§ 123),—слѣдовательно, эта послѣдняя плоскость перпендикулярна къ радіусу OF шара въ его концѣ,—значитъ она касательна къ шару (§ 459). Такъ-же объяснится, что сѣкущая плоскость $AMM'A'$ касательна къ другому шару $a'b'O'$



Фиг. 1

Замѣтимъ еще, что точки прикосновенія a и a' опишутъ окружности, на которыхъ соотвѣтственно будутъ лежать точки b и b'; ибо по равенству $Sa=Sb$ (§ 188), и угловъ $bSO=aSO$, прямая SO перпендикулярна къ ab и проходитъ чрезъ ея середину, то же скажемъ и о точкахъ a' и b'. Окружности эти составляютъ прикосновенія шаровъ съ коническою поверхностью

Произвольную точку M эллипса $AMMA'$ соединимъ съ точками Γ F' и вершиною S; причемъ производящая SM встрѣтитъ упомянутыя окружности въ точкахъ K и K' и будетъ касательною къ обоимъ шарамъ въ этихъ точкахъ; прямыя MF и MF' также касательны къ шарамъ, потому что лежатъ въ касательной плоскости и имѣютъ съ шарами общія точки F и F', а извѣстно, что прямыя, касательныя къ шару и проведенныя изъ одной точки равны между собою (§ 461)

слѣдовательно $\qquad MF=MK$ и $MF=MK'$,

отсюда $\qquad MF+MF'=MK+MK'=KK$

Но $KK' = aa = bb$ какъ разности равныхъ касательныхъ къ шарамъ; значитъ $MF + MF' = aa'$, или bb'.

Точка M взята произвольно на эллипсѣ, слѣдовательно все сказанное о ней вполнѣ относится и ко всякой точкѣ эллипса; напримѣръ для M будемъ имѣть $M'F + M'F' = aa'$ или bb'. такъ что съ измѣненіемъ точекъ эллипса, хотя разстоянія ихъ до F и F' будутъ измѣняться, но сумма ихъ всегда будетъ постоянная, именно: aa' или bb'

Отсюда выводится слѣдующее свойство точекъ эллипса.

Сумма разстояній каждой точки эллипса до двухъ точекъ F *и* F' *есть постоянная величина.* Постоянныя точки F и F' называются фокусами эллипса.

§ 3 Докажемъ что постоянная величина aa или bb' равна прямой AA.

Очевидно, что
$$aa = Aa + Aa',$$
$$bb' = A'b + A'b'.$$

На основаніи свойства боковъ угла, въ которомъ вписанъ кругъ получимъ

$$Aa = AF, Aa' = AF'; \text{ слѣд. } aa' = AF + AF' = FF' + 2AF$$
$$A'b = A'F, A'b' = A'F'; \text{ слѣд. } bb' = A'F + FA' = FF' + 2A'F'$$

но $\qquad aa' = bb'$, значитъ $AF = A'F'$,

и $\qquad aa' = AF + AF' = A'F + AF' = AA$

И такъ $\qquad MF + MF' = AA'$.

И такъ *эллипсъ имѣетъ то свойство, что сумма разстояній каждой его точки до двухъ постоянныхъ точекъ, находящихся въ плоскости кривой, всегда постоянна и равна прямой проходящей чрезъ эти точки и ограниченной кривою линіею.*

Двѣ постоянныя точки F и F' мы назвали *фокусами* эллипса. Мы видѣли, что $AF = A'F'$, слѣд. фокусы находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ точекъ A и A' прямой AA.

Разстоянія какой нибудь точки эллипса до фокусовъ называются *радіусами векторами*, напримѣръ MF и MF'.

Примѣчаніе. Легко объяснить, что сумма разстояній каждой точки, взятой внѣ эллипса, до фокусовъ больше прямой AA', а сумма разстояній каждой точки, взятой внутри эллипса, до фокусовъ меньше линіи AA'.

§ 4 Если сѣкущая плоскость перпендикулярна къ оси конуса, то, какъ извѣстно, получится кругъ. Причемъ легко убѣдиться, что точки касанія F и F′, получаемыя при сѣченіи перпендикулярномъ къ оси составятъ одну точку, именно центръ этого круга.

Если сѣкущая плоскость, дающая эллипсъ, будетъ приближаться къ вершинѣ S конуса, то эллипсъ будетъ уменьшаться, а въ вершинѣ S кривая обратится въ *точку* Итакъ частные случаи эллипса будутъ кругъ и точка

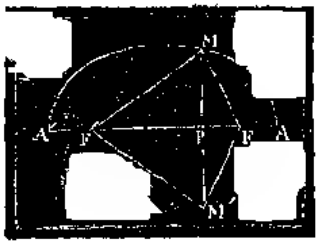
Предложеніе

§ 5. *Прямая, проходящая чрезъ фокусы эллипса, дѣлитъ по поламъ перпендикулярныя къ ней хорды.*

Пусть F и F′ означаютъ фокусы эллипса, длину прямой AA называемъ чрезъ $2a$. По свойству эллипса получимъ

$$MF + MF' = 2a \ldots (1)$$

Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MP на прямую AA и отложимъ $PM' = MP$ Такимъ образомъ получимъ точку M′; докажемъ, что она принадлежитъ эллипсу. Наклонныя MF и M′F, будучи равно-удалены отъ основанія перпендикуляра, равны между собою; по той же причинѣ наклонныя MF′ и M′F′ равны.



Фиг 2

Слѣд. подставляя, вмѣсто MF и MF′, равныя имъ въ (1) равенство получимъ $$M'F + M'F' = 2a$$

Отсюда и на основаніи § 3 заключаемъ, что точка M′ лежитъ на эллипсѣ; слѣд MM′ есть хорда эллипса, и она дѣлится пополамъ прямою AA′. Все сказанное о хордѣ MM′ относится ко всякой хордѣ перпендикулярной къ прямой AA′

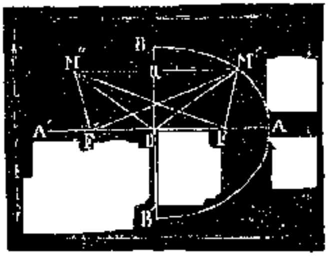
§ 6 Если согнуть плоскость на линіи AA′, верхнюю часть на нижнюю, то, на основаніи доказаннаго сейчасъ свойства, точки эллипса верхней части совпадутъ съ точками нижней; въ этомъ смыслѣ прямая AA′ называется *осью* кривой

Предложеніе

§. 7 *Перпендикуляръ возставленный къ линіи, соединяющей фокусы, изъ ея середины дѣлитъ по-поламъ перпендикулярныя къ нему хорды эллипса.* (На фиг 3 между A и B читай M)

*

Пусть F и F означаютъ фокусы, O—середину прямой FF BB — перпендикуляръ къ FF′, надобно доказать что всякая хорда эллипса, перпендикулярная къ BB′, раздѣлится пополамъ прямою BB′. Пусть M означаетъ какую нибудь точку эллипса и положимъ что $AA'=2a$, слѣд



Фиг. 3.

$$MF+MF'=2a\ldots\ (1)$$

Изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MQ на BB и отложимъ QM′—MQ; проведемъ прямыя M′F M″F′, M′O и MO Наклонныя M′O и MO равны между собою (§ 53) и уголъ M′OB=MOB слѣдовательно и дополненія ихъ до прямаго равны т е уголъ M OF = MOF; значитъ треугольники MOF и M″OF равны и MF=M′F′; а изъ равенства треугольниковъ MOF и M′OF (§ 89) заключаемъ что MF′=M″F. Поставивъ въ (1) равенство, вмѣсто MF и MF имъ равныя получимъ

$$M'F+M'F=2a;$$

поэтому точка M лежитъ на эллипсѣ и MM есть хорда эллипса которая прямою BB′ дѣлится пополамъ.

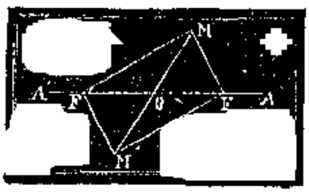
§ 8. Согнувъ чертежъ на линіи BB′ (справа налѣво) убѣждаемся, что точка M совпадаетъ съ M″. Точка M взята по произволу на эллипсѣ, значитъ, всѣ точки эллипса, лежащія по одну сторону прямой BB, совпадутъ съ точками эллипса по другой сторонѣ линіи BB′ Въ этомъ смыслѣ прямая BB есть *ось* эллипса

Предложеніе

§ 9 *Всякая хорда эллипса, проходящая чрезъ середину прямой соединяющей фокусы, дѣлится пополамъ въ этой точкѣ.*

Пусть F и F′ означаютъ фокусы эллипса, O — середина прямой FF. Возьмемъ какую нибудь точку M на эллипсѣ и соединимъ ее съ фокусами, получимъ

$$MF+MF'=2a\quad(1)$$



Фиг 4

гдѣ $2a=AA'$.

На продолженіи MO отложимъ OM′=OM и проведемъ прямыя M′F и M′F′. Въ четвероугольникѣ MFM′F діагонали MM′ и FF′ въ O дѣлятся пополамъ слѣд. это параллелограммъ,

значитъ МГ=МГ', МГ =М'F; вставивъ эти величины въ (1) равенство, получимъ $$M'F'+M'F=2a;$$
отсюда заключаемъ, что точка М лежитъ на эллипсѣ, слѣд. ММ есть хорда эллипса и она дѣлится по-поламъ въ точкѣ О, ибо МО =М'О. Тоже самое относится и ко всякой хордѣ.

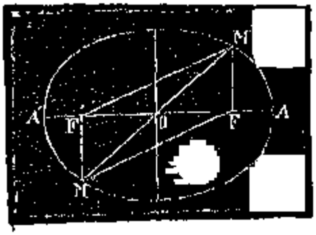
§ 10. Точка, въ которой всѣ хорды кривой дѣлятся по-поламъ, называется *центромъ* этой кривой, слѣд. О есть центръ эллипса. Это общее опредѣленіе центра относится и къ кругу, ибо въ центрѣ круга всѣ діаметры дѣлятся пополамъ

Предложеніе

§ 11. *Ось эллипса, проходящая чрезъ фокусы, больше всякой хорды, проходящей чрезъ центръ этой кривой.*

Пусть F и F' означаютъ фокусы, О—центръ АА—ось проведемъ чрезъ центръ О какую нибудь хорду ММ и докажемъ, что ММ'<АА

Соединивъ точки М и М' съ фокусами, получимъ четвероугольникъ MFMF', въ которомъ діагонали дѣлятся пополамъ, слѣдовательно онъ параллелограммъ и MF=M'F'



Фиг 5

MF'=M'F Но
$$MM'<MF+M'F$$
слѣд. $$MM'<MF+MF', \text{ ибо } M'F=MF'$$
или $$MM'<AA', \text{ ибо } MF+M'F=AA.$$

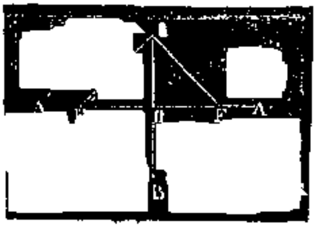
12. На основаніи предъидущаго предложенія заключаемъ, что ось АА', проходящая чрезъ фокусы, больше другой оси эллипса, которая перпендикулярна къ первой оси. Поэтому первая ось, АА, называется *большою осью*, а вторая—*малою осью*.

§ 13. Каждая ось эллипса пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ которыя называются *вершинами* эллипса; поэтому точки А А', В и В суть вершины

Вопросъ

§ 14. *Даны длины осей эллипса, найти разстояніе отъ центра эллипса до фокуса*

Пусть большая ось $AA'=2a$, малая ось $BB'=2b$, надобно найти длину OF. Изъ прямоугольнаго треугольника BOF,



Фиг 6

$$OF=\sqrt{BF^2-BO^2},$$

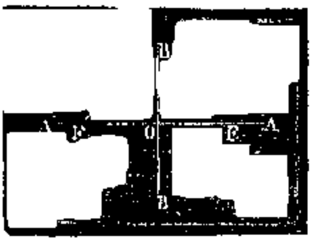
но $BF+BF'=2a$, ибо точка B на эллипсѣ а какъ $BF=BF'$, то $2BF=2a$, отсюда $BF=a$; по условію BB' или $2BO=2b$ слѣд. $BO=b$.

Итакъ $$OF=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Вопросъ

§ 15) *Даны оси эллипса большая и малая, найти фокусы.*

Пусть $AA'=2a$ и $BB'=2b$ означаютъ соотвѣтственно большую и малую оси, O — центръ эллипса; надобно опредѣлить фокусы F и F'. Принявъ точку B за центръ, радіусомъ равнымъ линіи AO или a, опишемъ дугу; она пересѣчетъ ось AA' въ двухъ точкахъ F и F', которыя и будутъ искомые фокусы. Дѣйствительно изъ прямоугольнаго треугольника BOF



Фиг 7

имѣемъ $$OF=\sqrt{BF^2-BO^2}$$
или $$OF=\sqrt{a^2-b^2},$$
что согласно съ предъидущимъ параграфомъ

Вопросъ

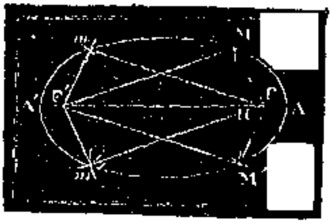
§ 16. *Даны оси эллипса, большая и малая, начертить эллипсъ*

Пусть AA' и BB' означаютъ большую и малую оси. На основаніи предъидущаго вопроса, найдемъ фокусы F и F'. Мы покажемъ два способа для начертанія эллипса.

1) Возьмемъ нить, которой длина равна большой оси AA', и укрѣпимъ ея концы въ фокусахъ F и F'; натянувъ нить карандашемъ, будемъ обводить его по бумагѣ такъ, чтобы нить переходила съ одной стороны карандаша на другую и была бы постоянно натянута; такимъ образомъ опишется эллипсъ, потому что для всякой точки, описанной

кривой, сумма разстояній до фокусовъ составитъ длину нити которая равна большой оси.

2) Между фокусами F и F' возьмемъ какую-нибудь точку H. Изъ фокуса F, какъ центра, радіусомъ AH пишемъ двѣ дуги одну выше оси AA', а другую ниже ея; тѣмъ же радіусомъ опишемъ двѣ дуги изъ другаго фокуса F'. Взявъ раствореніе циркуля, равное линіи A'H, опишемъ дуги изъ фокусовъ F и F', принимаемыхъ за центры; такимъ образомъ получимъ четыре точки пересѣченія M, M', m и m': они принадлежатъ эллипсу, потому что, напримѣръ, сумма разстояній MF и MF' равна AH+A'H, что составляетъ большую ось AA'. Подобнымъ построеніемъ можно получить сколько угодно точекъ эллипса, чрезъ которыя проводятъ линію отъ-руки.



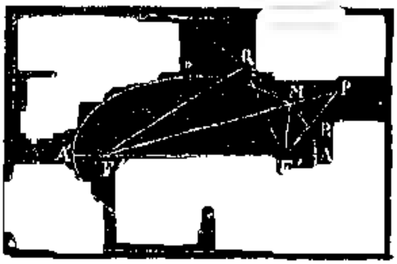
Фиг. 8.

Примѣчаніе. Круги пересѣкутся, ибо разстояніе между центрами F и F' меньше суммы радіусовъ AA', и больше ихъ разности A'H - AH или F'H - FH

Предложеніе

§ 17. *Прямая, раздѣляющая по-поламъ уголъ смежный углу, котораго вершина на эллипсѣ, а бока проходятъ чрезъ фокусы, имѣетъ одну только общую точку съ эллипсомъ.*

Соединивъ точку M эллипса съ фокусами F и F', получимъ уголъ FMF', а продоливъ бокъ F'M, получимъ уголъ FMP смежный первому углу. Пусть прямая MR дѣлитъ по-поламъ уголъ FMP; надобно доказать, что прямая MR, неопредѣленно продолженная, имѣетъ съ эллипсомъ только одну общую точку M, а всѣ прочія ея точки лежатъ внѣ эллипса.



Фиг. 9.

Отложимъ MP=MF и проведемъ прямую PF, получимъ равнобедренный треугольникъ MPF, въ которомъ уголъ при вершинѣ M раздѣленъ по поламъ, слѣд. MR перпендикулярна къ PF и проходитъ чрезъ ея середину R. Возьмемъ какую нибудь точку Q на прямой MR, она будетъ равно отстоять отъ концовъ прямой PF (§ 57), поэтому QP=QF

Но ломанная $F'QP$ больше прямой PF', т. е. $F'Q+QP>MF'+MP$ и $QP=QF$, $MF=MP$, слѣд.

$$F'Q+QF>F'M+MF$$

или

$$F'Q+QF>AA'.$$

И такъ точка Q лежитъ внѣ эллипса (§ 3 прим.). Это же заключеніе относится и ко всякой точкѣ прямой MR за исключеніемъ точки M, слѣд. MR имѣетъ одну только общую точку M съ эллипсомъ, а всѣ остальныя ея точки лежатъ внѣ эллипса.

Такая прямая называется *касательною* къ эллипсу, а точка M — *точкою касанія.*

§ 18. Поэтому, *касательною* къ эллипсу называется прямая, имѣющая одну только общую точку съ эллипсомъ.

И такъ, *прямая, раздѣляющая по-поламъ уголъ, смежный углу котораго вершина на эллипсѣ, а бока проходятъ чрезъ фокусы, касательна къ эллипсу.*

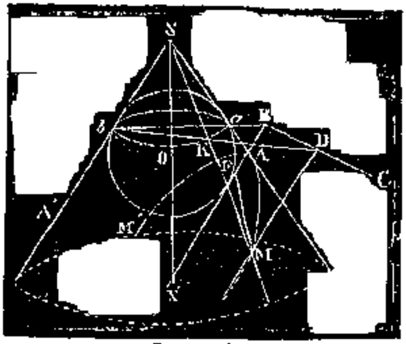
2. Парабола

§ 19. Пусть ASA' означаетъ сѣченія конуса по оси SO, въ плоскости этого сѣченія проведемъ AX параллельно производящей SA', и чрезъ прямую AX проведемъ плоскость MAM', перпендикулярную къ плоскости ASA': такимъ образомъ получимъ сѣкущую плоскость, параллельную производящей, а линія пересѣченія MAM' этой плоскости съ коническою поверхностью, какъ намъ извѣстно, называется *параболою.*

Фиг. 10

Опишемъ окружность aFb, которая касалась бы къ производящимъ SA, SA' и прямой AX (§ 188, прим.); положимъ, что a, b и F означаютъ точки прикосновенія. Вращая фигуру около оси SO, найдемъ, что половина окружности, которую мы описали, произведетъ шаръ, для котораго сѣкущая плоскость MAM' будетъ касательною въ точкѣ F, и прямая MF соединяющая какую-нибудь точку параболы съ F, будетъ касательною къ шару; прямая MS также касательная къ шару въ точкѣ K: все это объясняется точно также, какъ и въ элипсѣ (§ 2). И такъ

MF = MK (§ 461) Прямая ab пересѣкая линію AS пересѣчетъ и параллельную ей AX; положимъ что B означаетъ эту точку пересѣченія, а прямая BC—пересѣченіе плоскости круга abK съ сѣкущею плоскостью MAM': такъ какъ каждая изъ этихъ плоскостей перпендикулярна къ плоскости A'SA, то и сѣченіе ихъ BC перпендикулярно къ этой плоскости; значитъ оно перпендикулярно и къ BX, проведенной по этой плоскости. Прямыя bK и BC лежатъ въ одной плоскости abK, пусть D означаетъ ихъ пересѣченіе.



Фиг. 10

Точки D и M лежатъ въ плоскости MAM' а прямая MD параллельна AX: въ самомъ дѣлѣ, по условію, прямая AX параллельна производящей SA', слѣдовательно она параллельна плоскости SbKDM,—значитъ AX и DM не встрѣтятся, а какъ онѣ въ одной плоскости MAM', то AX параллельна MD. Отсюда заключаемъ, что MD параллельна SA', и треугольники KSb и KMD подобны, слѣдовательно MD:Sb = MK:SK, а по равенству Sb=SK, заключаемъ, что MD=MK,—значитъ MD=MF. И такъ точка M параболы находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ прямой BC и отъ точки F Точка M взята произвольно на параболѣ слѣдовательно тоже должно сказать и о всѣхъ ея точкахъ, значитъ

Всякая точка параболы находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ прямой BC *и отъ точки* F

§ 20 Пусть MAQ означаетъ параболу, для которой прямыя AX и BC, а также точка F, имѣютъ тѣ же значенія, что и на предъидущемъ чертежѣ, именно что BC перпендикулярна къ AX и что всякая точка кривой равно-отстоитъ отъ BC и F, значитъ AF=AB

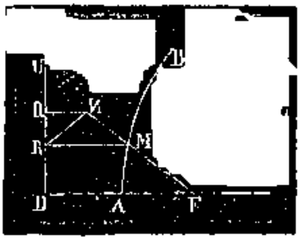
Фиг. 11

Точка F называется *фокусомъ* параболы а прямая BC — *директрисою*. Поэтому, свойство точекъ параболы, выведенное въ предъидущемъ параграфѣ, можно такъ выразить: *каждая точка параболы находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ фокуса и отъ директрисы.*

Предложенiе.

§ 21 *Всякая точка, лежащая не на параболѣ, будетъ ближе или дальше отстоять отъ директрисы нежели отъ фокуса, смотря потому будетъ ли она находиться внѣ параболы или внутри ея.*

1-е Пусть N означаетъ какую нибудь точку, взятую внѣ параболы, DU — директриса, F — фокусъ. Проведемъ перпендикуляръ NQ къ директрисѣ и докажемъ, что $NQ < NF$. Проведемъ изъ точки M перпендикуляръ MR къ директрисѣ и соединимъ точку N съ R. Очевидно, что



Фиг 12

$$NR < MR + MN$$

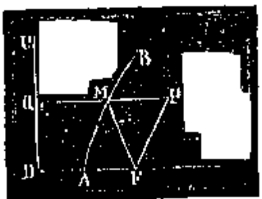
а такъ какъ точка M на параболѣ, то $MF = MR$,

слѣд $\quad NR < MF + NM$

или $\quad NR < NF.$

Съ другой стороны перпендикуляръ NQ меньше наклонной NR, слѣд подавно $\quad NQ < NF.$

2-е. Пусть P означаетъ какую нибудь точку, внутри параболы Соединимъ ее съ фокусомъ F и проведемъ перпендикуляръ PQ къ директрисѣ DU; надобно доказать что $PQ > PF$, Проведя прямую MF, получимъ



Фиг 13

$$MP + MF > PF$$

но $MF = MQ$ (§ 19), слѣд.

$$MP + MQ > PF$$

или $\quad PQ > PF.$

Предложенiе.

§ 22. *Прямая, проходящая чрезъ фокусъ параболы и перпендикулярная къ директрисѣ дѣлитъ пополамъ перпендикулярныя къ ней хорды.*

Пусть DU означаетъ директрису а F фокусъ параболы. Изъ фокуса опустимъ перпендикуляръ на директрису, а изъ произвольной точки M, взятой на параболѣ, опустимъ перпендикуляръ MP на линiю AX, отложимъ $PM' = MP$ и докажемъ, что точка M' принадлежитъ параболѣ, отсюда заключимъ, что MM' есть хорда параболы, перпендикулярная къ прямой AX, и она въ точкѣ P дѣлится пополамъ,

Фиг 14

а какъ точка M взята по произволу, то предложеніе будетъ доказано Проведемъ прямыя MQ и M Q' перпендикулярно къ директрисѣ По условію, точка M на параболѣ, слѣд. MF=MQ; но MF=M'F (§ 53), MQ=M Q' (§ 68) слѣд M'F=M'Q' значитъ точка M' на параболѣ.

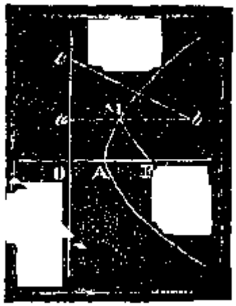
§ 23 Прямая AX, раздѣляющая по поламъ перпендикулярныя къ ней хорды называется *осью* параболы.

Точка A, пересѣченіе параболы съ осью, называется вершиною параболы

Вопросъ.

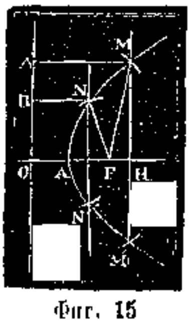
§ 24. *Начертить параболу, по данной директрисѣ и фокусу.*

1) Чертежный треугольникъ *abc* приставимъ меньшимъ катетомъ *ac* къ директрисѣ; возьмемъ нить, которой длина равна большему катету *ab* одинъ ея конецъ утвердимъ въ точкѣ *b*, вершинѣ треугольника, а другой въ фокусѣ F; натянемъ нить карандашемъ такъ, чтобы онъ прикасался къ катету *ab*, точка M, означенная карандашемъ, будетъ принадлежать параболѣ. Въ самомъ дѣлѣ, по условію, длина нити M*b*+MF равна длинѣ катета M*b*+M*a*; слѣдовательно MF=M*a*, но M*a* перпендикулярна къ директрисѣ, потому что треугольникъ *abc* прямоугольный, значитъ разстоянія точки M до фокуса F и директрисы *c*O равны между собою, и M принадлежитъ параболѣ. На этомъ основаніи получимъ параболу, если будемъ двигать треугольникъ *abc* такъ, чтобы его катетъ *ac* находился на директрисѣ, а карандашъ прилегалъ бы къ другому катету и нить была бы постоянно натянута.



Фиг 15

2) Чрезъ произвольную точку H, взятую на данной оси, проведемъ перпендикуляръ къ этой послѣдней. всѣ его точки находятся отъ директрисы A'O на разстояніи OH, изъ нихъ надобно найти такія точки, которыя находились бы на разстояніи OH отъ фокуса F; для этого изъ F, какъ центра, радіусомъ OH опишемъ дуги, одну выше оси, а другую ниже ея до пересѣченія съ упомянутымъ перпиндикуляромъ; такимъ образомъ получимъ двѣ точки M и M', принадлежащія параболѣ; потому что MF= OH= MA'. Подобно этому можно получить другія точки параболы чрезъ которыя проводятъ линію отъ-руки.

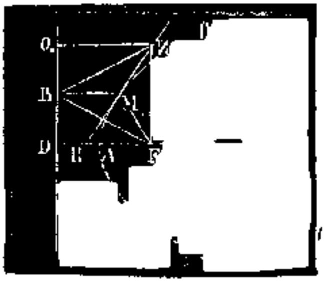


Фиг. 15

Предложенie

§ 25. *Если раздѣлить по-поламъ уголъ, котораго вершина на параболѣ, одинъ бокъ проходитъ чрезъ фокусъ, а другой бокъ перпендикуляренъ къ директрисѣ, то всѣ точки равнодѣлящей этотъ уголъ будутъ лежать внѣ параболы за исключенiемъ вершины.*

Возьмемъ какую нибудь точку M на параболѣ соединимъ ее съ фокусомъ F и проведемъ перпендикуляръ MB къ директрисѣ; пусть MR есть равнодѣлящая уголъ BMF, докажемъ, что всякая точка N



Фиг. 17.

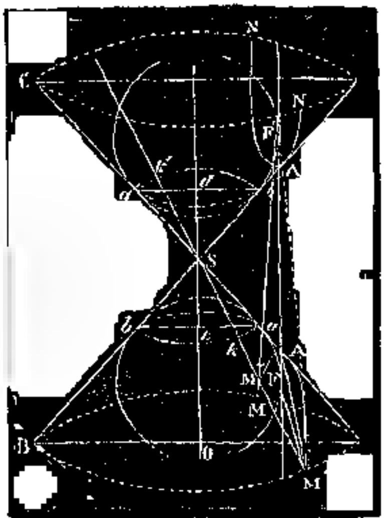
этой линiи лежитъ внѣ параболы. Проведемъ прямыя NF, NB, BF, а NQ перпендикулярно къ директрисѣ. Въ треугольникѣ BMF имѣемъ MF=MB, ибо точка M лежитъ на параболѣ; слѣд, MR есть равнодѣлящая уголъ равнобедреннаго треугольника, а потому она перпендикулярна къ основанiю BF и дѣлитъ его пополамъ; отсюда заключаемъ, что NF= NB (§ 53) Но NQ, какъ перпендикуляръ меньше наклонной NB, слѣд. NQ<NF, значитъ точка N внѣ параболы (§ 21). Тоже заключенiе относится ко всякой точкѣ равнодѣлящей MR, за исключенiемъ точки M

§ 26. Прямая, имѣющая одну общую точку съ параболою, и лежащая остальными точками внѣ этой кривой называется *касательною къ парбаолѣ.*

3 Гипербола

§ 27. Гипербола, по ея опредѣленiю, получается отъ разсѣченiя конуса плоскостью, которая встрѣчаетъ часть его производящихъ, а также часть производящихъ другаго конуса, который происходитъ отъ продолженiя всѣхъ производящихъ даннаго, за его вершину. Такимъ образомъ линiя эта состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей: одна MAM' находится на данномъ конусѣ, а другая NA'N лежитъ на другомъ конусѣ, происшедшемъ отъ продолженiя производящихъ перваго. Чрезъ ось SO конуса проведемъ плоскость ABS, перпендикулярную къ данной сѣкущей плоскости MAM'N'AN; пусть AA означаетъ ихъ взаимное пересѣченiе, а AC и A'B — производящiя. Впишемъ окружности, которыя бы касались къ этимъ тремъ линiямъ и находились въ углахъ

ASB и A'S'C, точки прикосновенія означимъ буквами F, a и b, F', a' и b'. Полуокружности этихъ круговъ, при обращеніи фигуры около оси SO, опишутъ шаровыя поверхности, къ которымъ сѣкущая плоскость MAM'NA'N' будетъ касательною въ точкахъ F и F'; точки a и a' опишутъ окружности. Возьмемъ какую-нибудь точку M на гиперболѣ и соединимъ ее съ точками прикосновенія F и F' и съ вершиною S: прямая MS встрѣтитъ окружности въ точкахъ k и k' и будетъ касательною къ шарамъ въ этихъ точкахъ, MF и MF' также касательныя къ шару. Все вышесказанное объясняется точно также, какъ въ эллипсѣ (§ 2)



Фиг. 48.

И такъ

$$MF=Mk,\ MF'=Mk' \text{ отсюда } MF'-MF=kk'.$$

Но $kk'=aa'=bb'$: и дѣйствительно, точки a, b, a', b', k и k' составляютъ точки прикосновенія касательныхъ линій къ шарамъ проходящихъ чрезъ вершину S, поэтому

$$Sk=Sa=Sb,$$
$$Sk'=Sa'=Sb';$$

отъ сложенія этихъ равенствъ получимъ

$$kk'=aa'=bb'$$

И такъ $$MF'-MF=aa'=bb'$$

Отсюда заключаемъ, что *разность разстояній точки M гиперболы отъ точекъ F' и F есть величина постоянная*. Докажемъ, какъ и въ § 3, что эта постоянная равна AA', т. е что $AA'=aa'=bb'$. На основаніи § 188

$$Aa'=A'F',\ \ Aa=AF, \text{ отсюда } aa'=AF'-AF=FF'-2AF$$

$$A'b=AF,\ A'b'=A'F' \text{ отсюда } bb'=A'F-A'F'=FF'-2A'F'$$

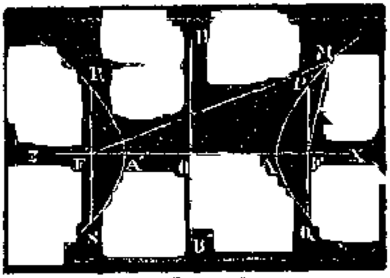
такъ какъ $aa'=bb'$ то $AF=A'F'$, и

$$aa'=AF'-AF=AF'-A'F'=AA'$$

Слѣдовательно $$MF'-MF=AA'$$

Точка M взята по произволу на гиперболѣ; слѣдовательно найденное свойство принадлежитъ всѣмъ точкамъ гиперболы. И такъ, *разность* *разстояній каждой точки гиперболы до двухъ точекъ* F *и* F' *есть постоянная величина* AA'. Притомъ какъ сейчасъ замѣчено, AF=A'F'.

§ 28 Пусть кривая MAQA'S (фиг. 19) означаетъ гиперболу, для которой прямая AA' и точки F и F' имѣютъ то-же значеніе, что и на фигурѣ предъидущаго параграфа



Фиг. 19

Изъ середины O прямой AA' возставимъ перпендикуляръ BB'. Прямыя XZ и BB' называются *осями* гиперболы; первая называется *пересѣкаемою* осью, потому что она встрѣчаетъ кривую въ точкахъ A и A'; вторая же—*не пересѣкаемою* осью

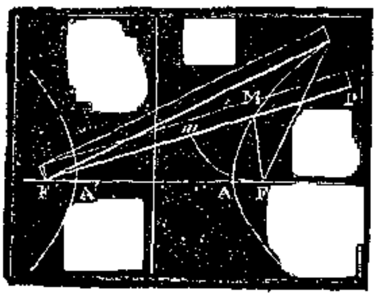
Точки A и A' пересѣченія оси съ кривою называются *вершинами* гиперболы; часто разстояніе между вершинами называются также осью.

Середина O пересѣкаемой оси AA' называется *центромъ* гиперболы

Принявъ эти названія, свойства точекъ гиперболы можно такъ выразить: *Разность разстояній каждой точки гиперболы отъ ея фокусовъ равна пересѣкаемой оси.*

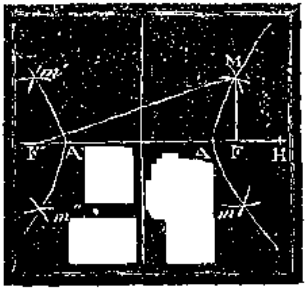
§ 29. *Черченіе гиперболы.* Пусть дана пересѣкаемая ось AA' и фокусы F и F'; требуется начертить гиперболу

1) Приставимъ линейку (какая имѣется подъ рукой) однимъ концомъ въ фокусѣ F', а къ другому ея концу P, укрѣпимъ нить, которой длина равна разности между длиною линейки и осью AA', свободный конецъ этой нити укрѣпимъ на фокусѣ F. Натянемъ нить карандашемъ такъ, чтобы онъ прилегалъ плотно къ краю линейки; тогда карандашъ означитъ точку M принадлежащую гиперболѣ; потому что, по условію, разность между длиною линейки PM+MF' и нитью PM+MF, или MF'—MF равна оси AA'. На этомъ основаніи гипербола начертится, если будемъ обращать линейку около фокуса F' такъ чтобы карандашъ прилегалъ къ ея краю, а нить была бы постоянно натянута



Фиг. 20.

2) На оси гиперболы возьмемъ произвольную точку H, внѣ прямой AA, получимъ A'H—AH=AA'; основываясь на этомъ замѣчаніи найдемъ точки, изъ коихъ каждая отстояла бы отъ одного фокуса на разстояніе A'H, а отъ другаго на AH. Для этого изъ фокуса F, какъ центра радіусомъ AH опишемъ двѣ дуги, одну выше оси, а другую ниже ея; тѣмъ-же раствореніемъ опишемъ двѣ дуги, принимая F' за центръ; точно также опишемъ дуги изъ фокусовъ F и F', принимаемыхъ за центры, радіусомъ A H: пересѣченія M m, m' и m' будутъ принадлежать гиперболѣ, потому что, напримѣръ, для точки M имѣемъ MF'—MF=A'H—AH=AA'. Такимъ образомъ можно получить сколько угодно точекъ гиперболы, чрезъ которыя проводится линія отъ руки.



Фиг. 21

КОНЕЦЪ

ПРИБАВЛЕНІЕ *).

О предѣлахъ вообще. Измѣреніе окружности и площади круга.

§ 1. *Постоянною величиною называется такая величина, которая въ продолженіе доказательства какого-либо предложенія или рѣшенія вопроса, сохраняетъ одно и тоже значеніе.* Напротивъ, *перемѣнною величиною называется такая величина, которая, при тѣхъ же обстоятельствахъ, измѣняется* (§ 295).

§ 2. Возьмемъ періодическую десятичную дробь

$$0,999\ldots$$

и сравнимъ ее съ 1-цею. Періодическая дробь 0,999... есть перемѣнная величина, а 1-ца постоянная величина; между этими величинами легко усмотрѣть слѣдующую зависимость: съ увеличеніемъ числа цифръ получается возрастающій рядъ дробей, но всегда меньшихъ постоянной 1-цы, хотя разность между 1-цею и этими дробями уменьшается и, при достаточномъ числѣ цифръ эта разность можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины, такъ:

разность	между	1-цею и	0,9	равна	$^{1}/_{10}$,
»	»	»	0,99	»	$^{1}/_{100}$,
»	»	»	0,999	»	$^{1}/_{1000}$,

и т. д.

---

*) Статья о предѣлахъ можетъ замѣнить статью о безконечно-малыхъ, изложенную въ текстѣ настоящаго руководства.

Въ этомъ смыслѣ постоянная величина 1 цы называется *предѣломъ* перемѣнной 0,999..

Вообще, *постоянное количество называется предѣломъ перемѣннаго количества, если это послѣднее, отъ какого-либо дѣйствія, увеличивается или уменьшается такъ, что разность между этими двумя количествами можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества*

Предложеніе

§ 3. *Предѣлы двухъ перемѣнныхъ величинъ равны между собою, если самыя перемѣнныя при всѣхъ послѣдовательныхъ измѣненіяхъ остаются равными.*

Пусть A есть предѣлъ перемѣнной x, и B есть предѣлъ той же перемѣнной x, что для краткости будемъ означать такъ

$$A = \text{пред. } x$$
$$B = \text{пред. } x$$

Положимъ, что предѣлы неравны и пусть A больше B, разность между постоянными A и B будетъ тоже постоянное количество, положимъ, что

$$A - B = k, \text{ отсюда } A = B + k$$

1) Предположимъ, что перемѣнное x приближается къ своему предѣлу, увеличиваясь, значитъ $A > x$ и $B > x$. Разность между постоянною и перемѣнною, вслѣдствіе опредѣленія предѣла, можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества δ, слѣд.

$$A - x < \delta$$

вставивъ въ это неравенство, вмѣсто A равное ему $B+k$, получимъ

$$B + k - x < \delta$$

или

$$(B - x) + k < \delta$$

Послѣднее неравенство невозможно; дѣйствительно, въ первой его части членъ k постоянное количество, слѣд. сумма $(B-x)+k$ всегда больше k, а мы получили, что она можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества δ. Такой нелѣпый выводъ происходитъ отъ невѣрнаго предположенія, что предѣлы A и B неравны между собою, слѣд. необходимо заключить, что $A=B$.

2) Предположимъ, что перемѣнное x приближается къ своему предѣлу уменьшаясь, значитъ $A < x$ и $B < x$. Разность между перемѣнною и ея предѣломъ, по опредѣленію (§ 2 приб.) можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества δ, слѣд.

$$x-B<\delta$$

мы уже видѣли, что $A=B+k$ и отсюда

$$B=A-k,$$

поставивъ въ предыдущее неравенство, вмѣсто B, равное ему, найдемъ

$$x-(A-k)<\delta \quad \text{отсюда} \quad x-A+k<\delta$$

или

$$(x-A)+k<\delta$$

неравенство это невозможно, ибо k есть постоянная величина, слѣд. первая часть всегда больше k и слѣд. не можетъ быть меньше всякаго даннаго количества δ. Итакъ нельзя допустить неравенство предѣловъ A и B, значитъ $A=B$

Предложеніе

§ 4. *Если перемѣнное и его предѣлъ умножатся на постоянное количество, то предѣломъ перваго произведенія будетъ второе произведеніе*; для краткости говорятъ: *перемѣнное количество и его предѣлъ можно умножить на постоянную величину* т. е. если $A=$пред. x, а m постоянное количество, то $Am=$пред. xm

1) Пусть $A>x$. Умноживъ обѣ части на положительное число m, получимъ $Am>xm$. Разность между постояннымъ Am и перемѣннымъ xm или

$$Am-xm=(A-x)\ m$$

Докажемъ, что эту разность можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества δ. По условію разность между предѣломъ A и перемѣнною x можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, слѣд. и меньше $\frac{\delta}{m}$, и такъ имѣемъ

$$A-x<\frac{\delta}{m},$$

умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное количество m, получимъ

$$(A-x).\ m<\delta$$

И такъ перемѣнное xm съ увеличеніемъ x увеличивается такъ, что разность между постояннымъ Am и перемѣннымъ xm можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, слѣд. постоянное Am есть предѣлъ перемѣннаго xm (§ 2, приб.).

2) Пусть $A<x$. Дальнѣйшее объясненіе тоже, что и въ предыдущемъ случаѣ.

Предложеніе

§ 5 *Если отношеніе перемѣнныхъ, при измѣненіи ихъ по какому либо закону, есть постоянное количество, то отношеніе ихъ предѣловъ равно этому постоянному.*

Пустъ A=пред. x. (1),
B=пред. y. (2);

положимъ еще, что съ измѣненіемъ перемѣнныхъ x и y, отношеніе ихъ равно постоянной величинѣ m, т. е. положимъ, что

$$\frac{x}{y}=m$$

Изъ послѣдняго равенства имѣемъ

$$x=y.m \qquad . \quad (3),$$

умноживъ перемѣнное y и его предѣлъ B на постоянное m на основаніи предыдущаго предложенія, получимъ

$$Bm=\text{пред } ym,$$

перемѣнная ym въ этомъ послѣднемъ выраженіи и перемѣнная x въ (1) выраженіи равны между собою на основаніи (3) равенства, слѣд. и предѣлы ихъ равны между собою (§ 3 приб.) т. е. A=Bm, а отсюда

$$\frac{A}{B}=m$$

Предложеніе

§ 6. *Окружность есть предѣлъ периметровъ вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, а также и описанныхъ около нея правильныхъ многоугольниковъ, когда число сторонъ этихъ многоугольниковъ постепенно увеличивается.*

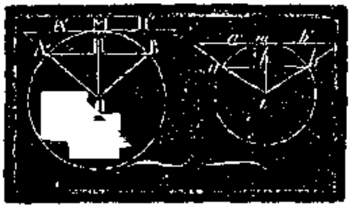
Пусть C означаетъ окружность какого-нибудь круга; въ этой окружности впишемъ какого-нибудь числа сторонъ правильный многоугольникъ и опишемъ около окружности правильный же многоугольникъ одинаковаго числа съ первымъ; вообразимъ, что число сторонъ этихъ многоугольниковъ постоянно удвоивается, такимъ образомъ вписанные периметры, которые назовемъ чрезъ p, будутъ увеличиваться, а описанные, назовемъ ихъ P, будутъ уменьшаться (§ 301) причемъ вписанные периметры будутъ меньше окружности, а описанные больше ея. Намъ извѣстно (§ 303), что можно въ кругѣ вписать и описать около него правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ, которыхъ разность периметровъ можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины, а какъ $C>p$ и $C<P$ (§ 301), то подавно разности $C-p$ и $P-C$, каждая, можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества. И такъ окружность C есть постоянное количество, къ которому перемѣнныя p и P приближаются, первое увеличиваясь, а второе уменьшаясь, притомъ разность между постояннымъ C и каждымъ перемѣннымъ p и P можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, слѣд. $C=$пред p и $C=$пред. P

Предложение

§ 7 *Окружности пропорціональны ихъ радіусамъ.*

Возьмемъ двѣ какія-нибудь окружности C и c, центръ одной O, другой—o (фиг. 182), радіусъ первой R, радіусъ второй—r; вообразимъ, что въ кругахъ вписаны правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ или описаны такіе же многоугольники, пусть AB и ab означаютъ бока вписанныхъ многоугольниковъ, а A'B' и a'b —бока описанныхъ многоугольниковъ, представимъ себѣ, что число сторонъ этихъ многоугольниковъ постепенно удваиваются, пусть P' и p' означаютъ периметры описанныхъ многоугольниковъ Вслѣдствіе предыдущаго предложенія имѣемъ

Фиг. 182



$$C=\text{пред. } P$$
$$c=\text{пред. } p.$$

Но периметры правильныхъ многоугольниковъ, одинаковаго числа, угловъ пропорціональны апоеемамъ и радіусамъ круговъ описанныхъ около этихъ многоугольниковъ (§ 294), причемъ $OM=R$ и $om=r$ суть апоеемы описанныхъ многоугольниковъ· слѣд.

$$P':p'=R\ r$$

И такъ отношеніе перемѣнныхъ P' и p' есть постоянное количество R:r значитъ и отношеніе ихъ предѣловъ C и c равно этому постоянному (§ 5 приб.), т е

$$C:c=R\ r$$

Предложеніе.

§ 8. ***Площадь круга есть предѣлъ площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ, а также и описанныхъ около него правильныхъ многоугольниковъ, когда число сторонъ этихъ многоугольниковъ постепенно удваивается***

Пусть S означаетъ площадь даннаго круга Q и q площади правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ, описанныхъ и вписаныхъ въ кругѣ, которыхъ число сторонъ постоянно удвaивается. Очевидно, что S есть постоянное количество, Q и q — перемѣнныя, первое уменьшается, а второе увеличивается съ удваиваніемъ числа сторонъ; разности Q—S и S—q каждая, можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, ибо S заключается между Q и q, а разность этихъ послѣднихъ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества (§ 303). И такъ

$$S = \text{пред. } Q$$
$$S = \text{пред. } q$$

Предложеніе

§ 9. *Площадь круга равна окружности умноженной на половину радіуса.*

Пусть S означаетъ площадь даннаго круга C — его окружность R — радіусъ.

Опишемъ около круга правильный многоугольникъ и будемъ увеличивать его число сторонъ, пусть Q означаетъ площади описанныхъ многоугольниковъ, а P—ихъ периметры. Такъ какъ окружность есть предѣлъ периметровъ описаныхъ многоугольниковъ (§ 6, приб.), то

$$C = \text{пред. } P$$

Умноживъ перемѣнное P и ея предѣлъ на постоянное количество $^1/_2 R$ получимъ (§ 4, приб.)

$$C.\frac{R}{2} = \text{пред. } P.\frac{R}{2}.$$

Но площадь многоугольника описаннаго около круга равна его периметру, умноженному на половину радіуса (§ 267), слѣд.

$$Q = P\,\frac{R}{2}$$

и
$$C\,\frac{R}{2} = \text{пред. } Q$$

но на основаніи предыдущаго § имѣемъ

$$S = \text{пред. } Q$$

И такъ одно и тоже перемѣнное Q имѣетъ два предѣла S и $C.\frac{R}{2}$, слѣд. эти предѣлы равны между собою (§ 3, приб.) Поэтому

$$S = C.\frac{R}{2}.$$

Выводъ поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ

§ 10. Поверхность называется *выпуклою*, будетъ ли она многогранная или кривая, если въ пересѣчении ея съ прямою линіею нельзя получить больше двухъ точекъ

Аксіома

§ 11 *Всякая плоская фигура меньше выпуклой поверхности имѣющей съ ней общій обводъ*

Предложеніе

§ 12. *Всякая выпуклая поверхность меньше объемлющей ее поверхности, если обѣ имѣютъ общій обводъ.* Доказательство см. § 463-й страница 245

Предложеніе

§ 13 *Полная поверхность цилиндра больше полной поверхности вписанной въ него призмы и меньше полной поверхности описанной около цилиндра.* Доказательство см § 463-й стр. 246.

Предложеніе

§ 14. *Всегда можно въ цилиндрѣ вписать и около него описать рядъ такихъ призмъ одинаковаго числа граней, что удваивая число этихъ послѣднихъ, разность между полными поверхностями, а также и объемами описанныхъ и вписанныхъ призмъ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества.*

Впишемъ въ основаніи цилиндра правильный многоугольникъ и опишемъ ему подобный, на этихъ многоугольникахъ построимъ прямыя призмы, вписанную и описанную, у нихъ будетъ общая высота съ высотою цилиндра, которую назовемъ буквою H. Вообразимъ, что число сторонъ многоугольниковъ постепенно удваивается и каждый разъ строятся вписанная и описанная призмы

Положимъ, что P означаетъ периметры описанные, а p—вписанные, R—апоѳема первыхъ многоугольниковъ или радіусъ основанія цилиндра, а r—апоѳемы вписанныхъ многоугольниковъ. Назовемъ буквами Q и q полныя поверхности описанной и вписанной призмъ получимъ (§§ 399 и 400)

$$Q=PH+2.P\frac{R}{2}=P(H+R)$$

$$q=pH+2.p\frac{r}{2}=p(H+r).$$

гдѣ члены PH и pH выражаютъ боковыя поверхности призмъ, а $P.\frac{R}{2}$ и $p.\frac{r}{2}$—площади основанія призмъ, описанной и вписанной.

Составимъ разности

$$Q-q=P(H+R)-p(H+r);$$

съ удвоеніемъ числа сторонъ описаннаго и вписаннаго многоугольниковъ разность периметровъ $P-p$ и разность $(H+R)-(H+r)$ или разность апоѳемъ $R-r$ могутъ быть сдѣланы меньше всякаго даннаго количества; слѣд. разность $Q-q$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества (см. выноску на стр. 247).

2) Пусть V и M означаютъ объемъ и основаніе призмы описанной около цилиндра, v и m—объемъ и основаніе вписанной призмы, H—общую высоту цилиндра и призмъ. Извѣстно (§ 432), что

$$V=M.H,$$
$$v=m.H;$$

разность $MH-mH$ или $H(M-m)$ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, если удваивать число сторонъ основаній M и m, ибо множитель H есть постоянная величина, а другой множитель $M-m$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества (см. доказательство § 4 приб.)

Предложеніе

§ 15. *Полная поверхность цилиндра есть предѣлъ полныхъ поверхностей вписанныхъ въ цилиндръ призмъ и описанныхъ около него призмъ, если постепенно удваивать число граней этихъ призмъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, полная поверхность цилиндра есть постоянная величина, полная поверхность вписанной призмы увеличивается, а описанной уменьшается съ удвоеніемъ числа ихъ граней (§ 399), при томъ разность между полною поверхностью цилиндра и каждою изъ упомянутыхъ поверхностей призмъ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, ибо полная поверхность цилиндра больше полной поверхности вписанныхъ призмъ и меньше лляной поверхности описанныхъ призмъ (§ 13, приб.), а разность между этими поверхностями призмъ, на основании предыдущаго предложенія, можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества

Предложеніе

§ 16. *Полная поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на сумму производящей цилиндра и радіуса его основанія.*

Пусть S означаетъ полную поверхность цилиндра, H—его высоту, она же и производящая и R—радіусъ основанія. Надобно доказать что

$$S=2\pi R(H+R)$$

Опишемъ призму около цилиндра и будемъ удваивать число ея граней пусть Q означаетъ полныя описанныя поверхности, P—периметры описанныхъ многоугольниковъ.

Окружность $2\pi R$ есть предѣлъ периметровъ P описанныхъ около нея многоугольниковъ (§ 6, приб.), т. е.

$$2\pi R=\text{пред } P;$$

умножимъ перемѣнное P и ея предѣлъ $2\pi R$ на постоянное количество $H+R$ получимъ (§ 4, приб.)

$$2\pi R(H+R)=\text{пред } P(H+R) \qquad (1)$$

Вслѣдствіе предыдущаго предложенія, имѣемъ

$$S=\text{пред. } Q. \quad . \qquad . \quad . \quad (2).$$

Но полная поверхность описанной призмы Q составляется изъ боковой поверхности PH и двухъ площадей основаніи, каждая изъ этихъ площадей равна (§ 267) $P.\frac{R}{2}$; слѣд. $Q=PH+PR$ или

$$Q=P(H+R).$$

И такъ въ (1) и (2) выраженіяхъ перемѣнныя Q и $P(H+R)$ равны между собою значитъ и предѣлы ихъ равны (§ 3, приб.) т. е.

$$S=2\pi R(H+R)$$

Предложеніе

§ 17. *Боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на производящую.*

Пусть s означаетъ боковую поверхность цилиндра, R радіусъ его основанія, H—производящую; надобно доказать, что $s=2\pi R.H$. Вычтя изъ полной поверхности цилиндра S удвоенное основаніе т. е. $2\pi R^2$ получимъ искомую боковую поверхность s слѣд.

$$s=S-2\pi R^2$$

но на основаніи предыдущаго предложенія

$$S=2\pi R(H+R)$$

слѣд

$$s=2\pi R(H+R)-2\pi R^2$$

развернувъ скобки по сокращеніи, получимъ

$$s=2\pi R H$$

Предложеніе

§ 18 *Объемъ цилиндра есть предѣлъ для объемовъ призмъ вписанныхъ и описанныхъ около цилиндра; если число граней этихъ призмъ постепенно удваивается.*

Дѣйствительно, объемъ цилиндр. есть постоянная величина, а объемы вписанныхъ и описанныхъ призмъ перемѣнныя, именно первыя увеличиваются а послѣднія уменьшаются (§§ 399 и 301), разность между этими перемѣнными можно сдѣлать меньше всякаго данаго количества (§ 303), а какъ объемъ цилиндра очевидно заключается между объемами призмъ вписанныхъ и описанныхъ, то подавно разности между объемомъ цилиндра и призмами какъ описаными такъ и вписанными, можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

Предложеніе

§ 19. *Объемъ цилиндра равенъ произведенію его основанія на высоту*

Пусть V означаетъ объемъ цилиндра H -его высоту R—радіусъ основанія; надобно доказать, что

$$V=\pi R^2 H$$

Опишемъ около цилиндра призму и будемъ увеличивать число ея граней, назовемъ V объемъ этихъ призмъ, а площади основаній будемъ называть буквою Q. Намъ извѣстно (§ 8, приб.), что площадь круга πR^2 есть предѣлъ для описанныхъ площадей многоугольниковъ Q_1, т. е.

$$\pi R^2=\text{пред}\ Q_1$$

умножимъ перемѣнное и ея предѣлъ на постоянное H, получимъ

$$\pi R^2 . H = \text{пред } Q_1 H \qquad (1)$$

Вслѣдствіе предыдущаго предложенія

$$V = \text{пред. } V_1 \qquad (2)$$

Въ выраженіяхъ (1) и (2) перемѣнныя V_1 и $Q_1 . H$ равны между собою (§ 432) слѣд. и постоянныя количества равны между собою т. е.

$$V = \pi R^2 H$$

Предложеніе

§ 20 *Полная поверхность конуса больше полной поверхности вписанной въ ней пирамиды и меньше полной поверхности описанной пирамиды* (Доказательство см. на стр. 249).

Предложеніе

§ 21. *Всегда можно въ конусъ вписать и около него описать рядъ такихъ пирамидъ одинаковаго числа граней, что, удваивая число ихъ, разность между полными поверхностями, а также и объемами описанныхъ и вписанныхъ пирамидъ, можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества.*

Впишемъ въ основаніи конуса и опишемъ около него два правильные многоугольника одинаковаго числа сторонъ, пусть P означаетъ периметръ описаннаго многоугольника и AB одинъ изъ его боковъ (фиг. 250), p—периметръ вписаннаго многоугольника и ab—одинъ изъ его боковъ; OM и Om означаютъ апоѳемы этихъ многоугольниковъ. Примемъ эти многоугольники за основанія правильныхъ пирамидъ, а вершину конуса T за вершину этихъ пирамидъ; апоѳемами пирамидъ будутъ прямыя TM и Tm.


Фиг. 250

1) Положимъ, для краткости, что S означаетъ полную поверхность конуса, Q и q—соотвѣтственно полныя поверхности описанной и вписанной пирамидъ. Получимъ (§§ 401 и 267)

$$Q = \frac{1}{2}P . MT + \frac{1}{2}P . MO = \frac{1}{2}P\,(MT + MO)$$

$$q = \frac{1}{2}p . mT + \frac{1}{2}p . mO = \frac{1}{2}p\,(mT + mO),$$

отсюда

$$Q \quad q=\frac{1}{2}P\,(MT+MO)-\frac{1}{2}p\,(mT+mO) \qquad (1)$$

Разность P—p можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, если удваивать число сторонъ основаній пирамидъ, разность другихъ множителей

$$(MT+MO)-(mT+mO)=MT-mT+MO-mO;$$

но $MO-mO=Mm$ а $MT-mT$, какъ разность двухъ боковъ треугольника MOm всегда меньше третьяго бока Mm; поэтому

$$(MT+MO)-(mT+mO)<2Mm$$

Mm, какъ разность апоѳемъ описаннаго и вписаннаго многоугольника, съ удвоеніемъ числа боковъ, можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества (§ 303), поэтому на основаніи выноски на страницѣ 247-й, вторую часть равенства (1) а слѣд. и Q—q можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

2) Пусть V_1 означаетъ объемы пирамидъ описанныхъ около конуса, v—объемы вписанныхъ пирамидъ, H—общую высоту пирамидъ, она же есть высота конуса, M и m основанія пирамидъ описанныхъ и вписанныхъ Вслѣдствіе выраженія для объема пирамидъ получимъ

$$V_1=\frac{1}{3}MH$$

$$v=\frac{1}{3}mH$$

отсюда

$$V \quad v=\frac{1}{3}H\,(M-m)$$

въ этомъ произведеніи множитель $\frac{1}{3}H$ -постоянное количество а множитель M—m, выражающій разность площадей описаннаго и вписаннаго многоугольника, какъ извѣстно, при удваиваніи числа сторонъ, можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества; слѣд. и произведеніе ихъ или V_1-v можетъ быть сдѣлано меньше всякаго даннаго количества.

Предложеніе

§ 22. *Полная поверхность конуса есть предѣлъ полныхъ поверхностей описанныхъ въ конусъ и описанныхъ около него пирамидъ, если постепенно удваивать число граней этихъ пирамидъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, полная поверхность конуса есть постоянная величина разность между полною поверхностью конуса и этими перемѣнными можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества ибо полная поверхность конуса больше вписанныхъ полныхъ поверхностей пирамидъ и меньше описанныхъ (§ 20 приб.), а разность между этими поверхностями пирамидъ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества

Предложеніе

§ 23. *Полная поверхность конуса равна половинѣ произведенія окружности основанія на сумму производящей и радіуса основанія.*

Пусть S означаетъ полную поверхность конуса R — радіусъ основанія K производящую; надобно доказать, что

$$S=2\pi R(K+R).$$

Опишемъ правильную пирамиду около конуса и будемъ удваивать число граней; пусть Q означаетъ полную поверхность описанной пирамиды, P — периметръ основанія пирамиды производящая K конуса будетъ апоѳемою описанной пирамиды.

Извѣстно (§ 6, приб) что

$$2\pi R = \text{пред } P$$

слѣд

$$2\pi R\frac{1}{2}(K+R) = \text{пред } \frac{1}{2}P(K+R) \qquad (1)$$

Извѣстно тоже, что

$$S = \text{пред. } Q \quad \ldots\ldots (2).$$

Но полная поверхность правильной пирамиды Q составляется изъ боковой поверхности $P.\frac{K}{2}$ и площади основанія $P.\frac{R}{2}$; слѣд. $Q=P\frac{K}{2}+P.\frac{R}{2}$ или

$$Q=\frac{1}{2}P.(K+R)$$

И такъ въ выраженіяхъ (1) и (2) перемѣнныя равны между собою значитъ и предѣлы ихъ равны, т. е

$$Q=2\pi R.\frac{1}{2}(K+R)$$

Предложеніе

§ 24. *Боковая поверхность конуса равна окружности основанія умноженной на половину производящей конуса.*

Пусть s означаетъ боковую поверхность конуса R—радіусъ основанія K—производящую; надобно доказать, что

$$s=2\pi R.\frac{K}{2}.$$

Вычтя изъ полной поверхности S конуса площади основанія πR^2 получимъ искомую боковую поверхность

$$s=S-\pi R^2$$

или

$$s=2\pi R.\frac{1}{2}(K+R)-\pi R^2$$

по сокращеніи

$$s=2\pi R\frac{K}{2}$$

Предложеніе

§ 25. *Объемъ конуса есть предѣлъ для объемовъ правильныхъ пирамидъ вписанныхъ и описанныхъ около конуса если число граней этихъ пирамидъ постепенно удваивается.*

Дѣйствительно, объемъ конуса больше объемовъ вписанныхъ въ немъ пирамидъ и меньше описанныхъ, а какъ разность между описанными и вписанными пирамидами можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, то подавно и разность между объемами описанныхъ пирамидъ и объемомъ конуса, а также разность между объемомъ конуса и вписанными пирамидами можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества; притомъ объемъ конуса постоянная величина, а объемы вписанныхъ пирамидъ увеличиваются, а объемы описанныхъ уменьшаются (§ 439).

Предложеніе

§ 26 *Объемъ конуса равенъ произведенію его основанія на треть высоты.*

Пусть V означаетъ объемъ даннаго конуса, R—радіусъ основанія и H—высоту; площадь основанія выразится πR^2 и надо доказать, что $V=\pi R^2.\frac{1}{3}H$.

Около конуса опишемъ пирамиды, которыхъ объемы назовемъ буквою V_1, площади основаніи пирамидъ—буквою M, высоты пирамидъ будутъ общія съ высотою H конуса. Мы видѣли, что

$$V=\text{пред}\ V_1 \qquad (1)$$

намъ также извѣстно что

$$\pi R^2=\text{пред.}\ M,$$

умноживъ перемѣнное и ея предѣлъ на постоянное $\frac{H}{3}$, получимъ

$$\pi R^2.\frac{H}{3}=\text{пред}\ M.\frac{H}{3}. \qquad (2)$$

Въ (1) и (2) выраженіяхъ перемѣнныя равны между собою (§ 439) слѣд. и предѣлы ихъ равны между собою т. е.

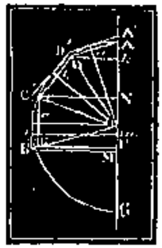
$$V = \frac{}{}R^2\frac{H}{3}$$

Предложение

§ 27. *Сегментная поверхность больше вписанной въ ней поверхности и меньше описанной поверхности* (фиг. 253).

Возьмемъ сегментную поверхность, происходящую отъ вращенія дуги AB окружности O около діаметра AG. Дугу AB раздѣлимъ на произвольное число равныхъ частей, напр. на четыре и соединимъ смежныя точки дѣленія, такимъ образомъ получимъ вписанную *правильную* ломаную линію ADCB. Чтобы описать правильную ломаную опустимъ перпендикуляры изъ центра O на бока вписанной ломаной до пресѣченія съ окружностью, а чрезъ эти точки пересѣченій проведемъ касательныя къ окружности; пусть A', D' C' и B', означаютъ точки пересѣченія этихъ касательныхъ съ продолженными радіуса, OA, OD, OC и OB; такимъ образомъ получимъ описанную правильную ломаную A'D'C'B' Отъ обращенія плоской фигуры ACG около діаметра AG, ломанная ADCB произведетъ вписанную поверхность въ сегментной поверхности, а ломаная A D'C'B'B — *описанную* поверхность.

Фиг. 253



Сегментная и вписанная въ ней поверхости упираются на общій обводъ—окружность, описанную радіусомъ BF, слѣд. сегментная поверхность, какъ объемлющая, больше вписанной въ ней поверхности, какъ объемлемой (§ 12, приб.). По той же причинѣ сегментная поверхность меньше поверхности происшедшей отъ обращенія правильной ломаной A'D'C'B' сложенной съ поверхностью, происшедшею отъ вращенія прямой BB

Предложение

§ 28. *Всегда можно вписать въ сегментной поверхности и описать около нея такія поверхности, что разность между ними можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.*

Въ данномъ сегментѣ впишемъ и опишемъ около него поверхности способомъ указаннымъ въ предыдущемъ параграфѣ. Пусть S_1 означаетъ описанную поверхность, s—вписанную. Намъ извѣстно (§ 471), что поверхность происшедшая отъ вращенія правильной ломаной около діаметра круга описан наго около этой ломаной равна произведенію окружности въ ней вписанной на высоту; слѣд.

$$S_1 = 2\pi . AO . A'M + \text{пов } BB$$
$$s = 2\pi aO . AF$$

слѣдовательно

$$S - s = 2\pi\ (AO\ A'M - aO . AF) + \text{пов. } BB.$$

Если удваивать число боковъ вписанной и описанной ломаныхъ, то разность $AO - aO$, или разность апоеемъ, можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества; тоже скажемъ и о разности $A'M - AF = AA' + MF < 2AA'$, наконецъ пов. $BB' = \pi (BF + B'M) . BB'$ (§ 466) тоже можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества: слѣд разность $S_1 - s$ будетъ меньше всякаго даннаго количества

Предложеніе

§ 29 *Сегментная поверхность есть предѣлъ описанныхъ въ нее и описанныхъ около нея поверхностей.*

Дѣйствительно, сегментная поверхность есть постоянная разность между ею и вписанною поверхностью, а также и описанною, можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, ибо разность между поверхностями вписанною и описанною можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества; а какъ сегментная поверхность больше вписанной и меньше описанной, то разность между нею и каждою изъ этихъ поверхностей, очевидно меньше разности описанной и вписанной поверхностей.

Предложеніе

§ 30. *Сегментная поверхность равна произведенію окружности большаго круга на высоту* (фиг. 253).

Пусть S означаетъ сегментную поверхность, происходящую отъ вращенія дуги AB, $H = AF$—высоту ея, $R = AO$—радіусъ шара; надо доказать, чт

$$S = 2\pi R . H.$$

Въ сегментной поверхности впишемъ поверхность, которую назовемъ буквою s, пусть r означаетъ апоему Oa. Такъ какъ разность апоемъ $R - r$ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества, т

$$R = \text{пред } r$$

слѣдователно

$$2\pi RH = \text{пред. } 2\pi rH \qquad (1)$$

ток и

$$S = \text{пред.} \, s \qquad (2),$$

но вписанная поверхность s равна окружности вписанной $2\pi r$ умноженной на сегментную высоту H, т. е. въ (1) и (2) выраженіяхъ перемѣнныя равны между собою, слѣд. и предѣлы ихъ равны, т. е.

$$S = 2\pi R H$$

Предложеніе

§ 31. *Всегда можно въ шаровомъ секторѣ вписать и описать около него такія тѣла, что разность между ихъ объемами можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.*

Разсмотримъ объемъ шароваго сектора, происходящаго отъ вращенія круговаго сектора ABO (фиг. 253) около діаметра AG. Въ дугѣ AB впишемъ правильную ломаную и опишемъ около нея такого же числа сторонъ правильную ломаную (§ 27, приб.); отъ обращенія многоугольниковъ A'D'C'B'O и ADCBO около діаметра AG получимъ тѣла, изъ которыхъ первое будемъ называть *описаннымъ*, а второе *вписаннымъ* въ шаровомъ секторѣ. Назвавъ объемъ перваго тѣла буквою V, втораго буквою v разсужденіями изложенными въ § 476 получимъ

$$V = \text{пов. } A'D'C'B' . \frac{AO}{3}$$

$$v = \text{пов. } ADCB . \frac{aO}{3}$$

отсюда

$$V - v = \text{пов. } A'D'C'B' . \frac{AO}{3} - \text{пов. } ADCB . \frac{aO}{3}.$$

Въ второй части этого равенства каждая изъ разностей пов. A'D'C'B'— пов. ADCB (§ 28, приб.) и $\frac{AO}{3} - \frac{aO}{3}$, а слѣд. и $V - v$ (см. выноска страницы 247) можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

Предложеніе

§ 32. *Объемъ шароваго сектора есть предѣлъ объемовъ вписанныхъ въ немъ и описанныхъ около него тѣлъ.*

Дѣйствительно, объемъ шароваго сектора есть постоянная величина, а вписанныя и описанныя тѣла, перемѣнныя, притомъ объемъ шароваго сектора больше вписанныхъ и меньше описанныхъ тѣлъ; значитъ на основаніи предыдущаго предложенія, разность между объемомъ шароваго сектора и вписанными объемами, а также и описаными можно сдѣлать меньше всякаго данного количества

Предложеніе.

§ 33. *Объемъ шароваго сектора равенъ соотвѣтствующей ему сегментной поверхности умноженной на треть радіуса шара.*

Пусть V означаетъ объемъ шароваго сектора, S—соотвѣтствующую ему сегментную поверхность, R—радіусъ шара, V_1—объемъ описаннаго тѣла около шароваго сектора; S_1—соотвѣтствующую ему поверхность, произведенную описанною ломаною. Извѣстно (§ 29. приб.), что

$$S = \text{пред. } S_1$$

слѣдовательно

$$S.\frac{R}{3} = \text{пред. } S_1\frac{R}{3} \qquad (1)$$

На основаніи предыдущаго §, имѣемъ

$$V = \text{пред. } V_1 \qquad (2)$$

но описанный объемъ V_1 около шароваго сектора равенъ соотвѣтственной поверхности S_1 умноженной на треть радіуса R круга вписаннаго въ ломаной т. е.

$$V_1 = S_1.\frac{R}{3};$$

и такъ перемѣнныя въ выраженіяхъ (1) и (2) равны между собою, значитъ и предѣлы ихъ равны, т. е.

$$V = S.\frac{R}{3}.$$

ОПЕЧАТКИ

Стран.	*Строки.*	*Напечатано:*	*Должно читать*
9	16 сверху	(фиг. 8)	(фиг. 9)
35	6 „	§ 74)	(§ 75)
42	19 „	*сторона*	*сторонамъ*
56	10 снизу	B съ B	B' съ B
85	13 сверху	BD	CBD
94	14 „	ради	рода
98	6 снизу	J =	JK=
111	10 сверху	CD : BDA,D	CD : BD, AD
128	8 „	ABC $\frac{AD+BD,CD}{2}$	$ABC=\frac{(AD+BD)BD}{2}$
128	14 „	$ABC=\frac{BD.CD \quad AD.CD}{2 - 2}$	$ABC-\frac{BD.CD}{2}-\frac{AD.CD}{2}$
143	1 снизу	MH=MO=OH	MH=MO—OH
143	1 „	$\sqrt{\frac{4r^2-a^2}{2}}$	$\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2}$
143	2 „	MQ+MH	MQ.MH
156	13 сверху	πR_2	πR^2
161	8 снизу	$\frac{10}{71}$	$3\frac{10}{71}$
163	13	$\frac{1}{106}$	$\frac{1}{10^6}$
163	14	$\frac{1}{107}$	$\frac{1}{10^7}$
163	17	$\frac{BD}{DC}$	$\frac{BD}{BC}$
165	7	MN и MN	MN и MN
189	2 „	FC	FG
190	3 и 4 „	FC	FG
213	11 сверху	CC	CC'
214	13 „	CB=	CBG=
220	4 снизу	oa c	oabc
229	17 сверху	dehlg	dehfg
230	15 снизу	V+QH	V=QH
235	7 „	H : q	H : h
237	8 сверху	$\frac{A^1}{a^1}$	$\frac{A^3}{a^3}$
237	11 „	*многогранники*	*многоугольники*
240	7 снизу	и K	и KG
242	14 „	*плоскостью*	*плоскость*
246	4 „	многогранники	многоугольник
251	6 „	$V : v+R^2 : r^2$	$V : v=R^3 : r^3$
252	15 сверху	BO'	B'O'
252	5 снизу	B	B''
253	1 сверху	BB,G	BB'G
253	2 „	B''OF	B''O''F

Стран.	Строки.	Напечатано:	Должно читать:
264	16 снизу	$\frac{V}{V'}=\frac{1}{6}$	$\frac{V}{V'}=\frac{4}{6}$
273	2 „	MF	MF'
274	16 „	AF'	A'F
276	9 сверху	BB	BB'
276	12 „	M'OF'	M''OF'
277	1 „	MF=MF'	MF=M'F'
277	17 снизу	MFMF'	MFM'F'
277	13 „	MM'<MF+M'F'	MM'<MF+M'F'
280	17 сверху	ASA''	ASA'
285	1 „	A'S'C	A'SC
13 (приб.)	9 „	$S=2\pi R(K+R)$	$S=2\pi R^1/_2(K+R)$
13 (приб.)	7 снизу	$Q=2\pi R^1/_2(K+R)$	$S=2\pi R^1/_2(K+R)$

ОПЕЧАТКИ НА ЧЕРТЕЖАХЪ

СТРАНИЦЫ.

276-я, фиг. 3, вмѣсто M', читайте M

278-я, фиг. 7, выше AA' надо читать не B', а B; ниже AA' на оборотъ, вмѣсто B читайте B'

279-я, фиг. 9. Вмѣсто F' ближайшей къ A читайте F